Pestalozzi's

sämmtliche Schriften.

Vierzehnter Band.

Stuttgart und Tübingen,

in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung.

1826.

Praktische

Elementarübungen.

Vorrede.

Indem wir uns vornehmen, die Resultate unsrer vieljährigen Bestrebungen, den Volksunterricht durch die möglichste Vereinfachung seiner Mittel den Wohnstuben desselben näher zu bringen, dem Publikum vorzulegen und besonders durch die gegenwärtigen Bogen thatsächlich ins Licht zu setzen, daß die von uns vereinfachte Zahl- und Formlehre geeignet sey, von den Müttern des Landes allgemein dahin benutzt zu werden, sie in vorgezeichneten Stufenfolgen ihren Kindern naturgemäß und mit gesichertem Erfolg einzuüben; so fühlen wir dabey dennoch, daß diese Einführung sehr großen Schwierigkeiten ausgesetzt seyn wird; um so mehr, da wir uns nicht verhehlen dürfen, daß die Art und Weise, wie der praktische Theil unsrer Erziehungs- und Unterrichtsmittel bis jetzt wirklich ausgeführt worden, zu vielerley unrichtigen Ansichten, unbegründeten Urtheilen und selbst zu Mißgriffen und Mißverständnissen Anlaß gegeben haben, die wir nicht mehr unberührt auf Gerathewohlhin wirken lassen können, was sie fundamentlos zu wirken vermögen.

Soll das, was wir durch unsere Bestrebungen für die Erziehung und den Unterricht zu erzielen gesucht haben, in der Tiefe der Menschennatur Wurzel fassen, und nicht als eine oberflächliche und vergängliche Zeiterscheinung, wie ein Meteor, wieder verschwinden; so ist vor allem aus nothwendig, daß wir diese praktische Darlegung des Gegenstandes von seinem ersten und ursprünglichsten Anfange an in's Auge fassen. Deßwegen müssen wir bitten, nicht nur die Darlegung des Unterrichtsfaches, die den Inhalt dieses Bandes ausmacht, sondern alles, was wir dießfalls ununterbrochen vorzulegen gedenken, von diesem Standpunkt aus zu betrachten und einer ernsten Prüfung zu würdigen. Aus der gegenwärtig vorgelegten Schrift geht klar hervor, daß eine wahre und begründete Erziehung und ein naturgemäßer Unterricht in allen seinen Theilen von der Wiege an seinen Anfang nehmen muß, wenn er nicht fundamentlos dastehen und auf Sand gebaut werden soll; nicht weniger, daß das häusliche Leben mit allen seinen bildenden Elementen und Berührungen die erste und wesentlichste Schule aller Erziehung, alles Unterrichts, ja selbst die Schule des gesammten Menschengeschlechts ist. Wird das häusliche Leben fernerhin als ein verödetes, für die Erziehung und den Unterricht unnützes und unbrauchbares Bildungsmittel angesehen und behandelt; so müssen wir unverholen gestehen, das Eigenthümliche unsrer Lebensbestrebungen würde in diesem Fall durchaus keinen Boden finden, auf dem es auf irgend eine Art wirklich zu gedeihen hoffen dürfte. Es muß also alles daran liegen, daß das Wesen unsrer dießfälligen Ansichten nicht im Dunkeln gelassen werde. Es kann aber nicht.

Doch, das Licht der wesentlichsten elementarischen Grundsätze, das durch allen Dunkel unsers verkünstelten Zustandes durchschimmert, ist von einer Natur, daß es nicht allein im Geist und im Herzen der edlern, ausgezeichnetern Männer unsers Geschlechts Nahrung findet; nein, es findet seine beste und kraftvollste Nahrung ganz gewiß in der Menge aller Menschen, denen Muttersinn und Muttertreue, Vaterkraft und Vatertreue inwohnt und truglos und wahrhaft eigen ist. Indeß kann ich mir durchaus nicht verhehlen, daß die größere Anzahl der sogeheißenen, gebildeten Zeitwelt und ganz gewiß auch mehrere sehr ausgezeichnete Kenner wissenschaftlicher Fächer nie einwenden werden, das, was wir durch das A B C Buch unsrer Zahl- und Formlehre zu erzielen suchen, werde in der Art und Weise, wie das Zählen, Messen und Rechnen in den bessern Schulen betrieben werde, nicht nur alles geleistet, sondern weit übertroffen. Ich muß aber darüber bestimmt antworten, daß diejenigen Personen, welche hierüber also absprechen, welches Verdienst sie sonst auch immer haben mögen, das Eigenthümliche unsrer Zahl- und Formlehre und den bestimmten Zweck ihrer Mittel, nicht in seinem wahren Gesichtspunkt ansehn. Unsere Darlegung der Zahl- und Formlehre darf durchaus nicht als ein blos vorzügliches Handbuch, um die Kinder schnell und richtig zählen, messen und rechnen zu lehren, angesehen werden. Unsere aufgestellten Reihenfolgen der Uebungen im Zählen und Messen haben einen ganz andern Standpunkt, von dem sie ausgehn, und sollen das Kind durch ihr tief ins Innere seiner Bildungsfähigkeit eingreifendes Wesen unendlich weiter als nur dahin führen. Die allgemeine Entwickelung seiner geistigen Anlagen und Kräfte, von ihrer ersten Stufe an, in welcher sich dieselben zu äußern anfangen, ist das Wesentlichste und Wichtigste, das wir durch sie zu erzielen suchen und was bey genauer Befolgung der Wegweisung und Stufenfolgen, die wir in diesen Bogen ausführlich darzulegen gesucht haben, auch mit Sicherheit erzielt werden kann. Es ist uns also nicht genug, daß der Schüler dahin geführt werde, mit einiger Leichtigkeit und Sicherheit rechnen zu lernen; er soll zur richtigen Anschauung und von der richtigen Anschauung zum richtigen Denken, und vom richtigen Denken endlich zum richtigen Rechnen geführt werden. Aber durch eine richtige Anschauung und durch ein richtiges Denken soll der Schüler eben so geschickt zu alle dem werden, was die Denkkraft nur einigermaßen anspricht, als er es durch die dießfälligen Uebungen für das Rechnen geworden ist. Es kann also niemand mehr auffallen, daß und warum man diesen Uebungen eine Ausdehnung und einen in einander greifenden Zusammenhang gegeben hat, vermöge deren immer jede vorhergehende Uebung als Grundlage, auf welche jede künftige gebaut werden kann und gebaut werden soll, angesehen werden muß. Daß auf diesem Wege nicht nur die Denkkraft des Kindes auf eine Weise gebildet wird, die das Höchste zu erzielen geeignet ist; sondern daß dadurch selbst die schöpferische Denk- und Erfindungskraft des Kindes einen Spielraum und eine Ausdehnung erhalten, die für sein ganzes künftiges Leben von den größten und weitführendsten Folgen seyn werden, kann nun keinem Zweifel mehr unterliegen. Eine andere Einwendung, von der ich mir eben so wenig verhehlen kann, daß sie von noch weit mehrern gebildeten Zeitmenschen gegen meine Anmaßung, die Zeitmütter mit der Erlernung dieser Stufenfolgen zu belasten, gemacht werden wird, ist diese: es werde bey diesem Versuch, wenn er auch an sich gute Folgen haben könnte, dennoch nichts herauskommen, die Zeitmütter werden sich diese Hauslast zu den übrigen, die sie schon auf sich haben, nicht noch aufladen lassen. Und ich sehe zum voraus, die weit größere Anzahl der gebildeten Zeitmütter werden diesem vorlauten Urtheil sehr vieler, sonst weiser Männer unsrer Zeit ihren lauten Beyfall geben und bestimmt behaupten, die Ansichten dieser Zahl- und Formlehre seyen ihrer empfangenen Bildung ganz fremd und sie selber darin so ungewandt als junge Kinder und sichtbar noch weit unbehaglicher als sie. Es ist indeß gut, daß die größere Anzahl der Zeitmütter diesen Einwendungen nur darum ihren Beyfall geben, weil sie sich selber in der Wahrheit ihrer Mutterliebe und ihrer Mutterkraft nicht erkennen und den Mangel an der Kunstausbildung dieser Kraft als Mangel an dem Wesen derselben, die hiefür allein angesprochen wird, ansehn. Viele von denen, die in dieser Täuschung leben, haben diese Kraft vielleicht in eben dem Grad reiner und stärker in sich selbst, weil sie unter dem Schein der Bildung dazu nicht mißbildet worden. Die Natur mangelt, Gott Lob! dem Menschengeschlecht nicht, wenn ihm schon die

Handbietung der Kunstausbildung derselben mangelt. Die edelste Kraft kann durch Umstände so eingeschläfert werden, daß sie äußerlich wirklich als todt und gänzlich mangelnd in die Augen fällt, und der Mensch, der sich der äußern Darstellungsfähigkeit beraubt sieht, kann wirklich in die Täuschung fallen, er besitze eine solche Kraft gar nicht. Aber sie mangelt ihm um deßwillen bey fernem nicht innerlich in sich selbst, und wenn Umstände und Verhältnisse eintreten und ihm Thatsachen vor seine Sinne gebracht werden, die diese innerlich in ihm noch lebende Kraft mit Macht ergreifen; so erwacht er aus seiner Selbsttäuschung, und fühlt was er ist, was er kann und was er will. Und im Grund ist das weibliche Geschlecht unendlich weniger in der Täuschung über alles, was ihre Mutterliebe, Muttertreue und Mutterpflicht anspricht, durch den Eindruck der Zeitverhältnisse und Zeitlasten verirrt und verhärtet, als das männliche durch diese Verhältnisse und Lasten gegen die heiligen Gefühle der reinen Vaterliebe, Vatertreue und Vaterpflicht, besonders in den gebildeten Ständen vielseitig verirrt und verhärtet ist. Es ist unstreitig richtig, die Mutter findet sich in allen Ständen und Verhältnissen, in denen ihr Mutterherz, ihre Muttertreue und ihre Mutterkraft naturgemäß angesprochen wird, leicht, lebendig und schnell sich selbstfühlend bewegt; und wir dürfen durch eine Reihenfolge von großen Erfahrungen belegt, zuversichtlich aussprechen: unsere Zahl- und Formlehre hat Mütter aus allen Ständen, wenn sie ihre Resultate an unsern Kindern gesehen haben, auf eine Weise ergriffen, daß sie mit den bestimmten

Worten vor unsern Ohren ausgesprochen: Gott! wenn wir in unserer Jugend auf diese Weise zählen, messen und zeichnen gelernt hätten, wie vieles könnten wir unsere Kinder in der Wohnstube selber lehren, das wir jetzt fremden Leuten überlassen müssen, die das, was hier geleistet wird, selber nicht können, indem sie es nicht thun. — Ja, es ist bestimmt wahr und wir dürfen es mit Zuversicht aussprechen, die Mittel der Elementarbildung, und namentlich diejenigen der Zahl- und Formlehre, sind durch ihr Wesen geeignet, nicht nur entscheidend große Resultate für die naturgemäße Ausbildung der Geistes- und Kunstkräfte hervorzubringen, sondern selber die Lücken und Fehler, die durch den Mangel an Bildung und selber durch die Mißbildung unsrer Kräfte und Anlagen erzeugt worden sind, allmälig in unserm Geschlecht wieder auszubilden. Nein, Mütter des Landes! trauet euch selbst und glaubet und laßt euch nicht angeben, daß ihr unfähig seyd, die Armseligkeit der einfachen Formen euch einzuüben und zum Segen eurer Kinder euch eigen zu machen, die ein jedes Kind, wenn sie ihm in Liebe und Freyheit vor die Sinne gebracht werden, von sich selber spielend ergreift und sich eigen macht. Die Theilnahme an dem Kinderspiel dieser Uebungen nimmt euch wahrlich nicht so viel Zeit und wird euch nicht so lästig, als es euch bey der ersten, euch nur auf dem Papier und nicht in der wirklichen Anschauung vorgelegten Darstellung erscheinen mag. Nein, Mütter! erlieget dem Blendwerk dieser, euerm Mutterherzen so nachtheiligen Täuschungen nicht in kindischem Leichtsinn, in kindischer Leichtgläubigkeit. Nein, Mütter! erlieget ihm nicht. Seyd nicht schwachmüthig. Es ist eure Mutterpflicht, unterlieget derselben nicht ohne Schwertstreich. Erlaubet mir, euch über diese Täuschung so viel Licht zu geben, als mir immer möglich ist. Ich habe in der Ueberzeugung eurer innern Belebung für alles, was das Heil und den Segen eurer Kinder zu betreffen vermag, mich in der ganzen Ausdehnung meiner Bestrebungen, den Volksunterricht zu vereinfachen, vorzüglich an euch gewandt, und die Mutter nicht nur als die wichtigste und erste Lehrerin ihrer Kinder dargestellt, sondern auch alles gethan, was mir möglich gewesen, ihr Mittel zu geben, die am allermeisten, und ich möchte fast sagen, nur allein in ihrer Hand groß und segensvoll werden können. Selbst die Zahl- und Formlehre ist in diesem Geist bearbeitet, und es ist alles nur mögliche gethan worden, dieselbe zu der kindlichen Einfachheit, ich weiß nicht, ob ich sagen soll, herabzustimmen oder hinaufzuheben, in der sie wirklich in eure Hand gelegt wird. Und, Mütter! seyd dessen sicher, die Anforderungen, die dieser Bogen halber an euch geschehen, sind nicht geeignet, euch, wie ihr wähnet oder wie man euch angeben möchte, den Muth zu nehmen, auch nur einen Anfang davon zu machen und einen Versuch zu wagen. Nein, nein, sie sind bestimmt geeignet, euren Muth hiefür in euch selber zu begründen und euch den Erfolg desselben zum voraus sicher zu stellen, indem sie euch positive Mittel der Ausführung dessen, was wir von eurer Mutterliebe und von eurer Muttertreue wünschen und hoffen zu dürfen glauben, an die Hand geben. Ich muß aber in dieser Rücksicht die Mutter auf den natürlichen Standpunkt zurückführen, von dem ihre ursprüngliche Thätigkeit in Rücksicht auf diesen Gegenstand, wie in allen andern in der Welt, auszugehn vermag. Sie, diese Thätigkeit, muß nothwendig beym Leichten und Einfachen anfangen und an das geknüpft werden, was in ihr sich schon zum voraus begründet vorfindet. Ich will deßwegen annehmen, eine Mutter sey nicht im Stande, im ganzen Umfange der Bedürfnisse ihrer Kinder das zu gebrauchen und anzuwenden, was ich über die Zahl und Form dießfalls darlegte, und sogar, es mache ihr sehr viele Mühe, sich das eigen zu machen, was von ihr in dieser Schrift, so wenig es auch sey, gefordert werde, ja sie halte sich selbst für unfähig, sich dieses in einem hohen Grad eigen zu machen, um es ihren Kindern mit bedeutendem Erfolg mittheilen zu können; so muß ich, wenn ich alles dieses für wahr und selbstsuchtlos ausgesprochen annehme, ihr dennoch bemerken, das enthebe sie in einer, für ihr Kind so wichtigen Angelegenheit der Pflicht nicht, die ersten Anfänge dieser Anleitung in's Auge zu fassen und selbst zu sehen, ob es denn wirklich so schwer sey, sie sich eigen zu machen. Vieles, sehr vieles in der Welt ist nur darum und nur so lange schwer, als man nicht vernünftig und ernst versucht, es sich eigen zu machen. Alles in der Welt, das man nicht kann, muß gelernt werden. Fange die Mutter nur an, und sollte ihr Anfang noch einmal so mangelhaft und lückenvoll ausfallen, sie wird mit ihrem Kinde dennoch vorwärts kommen, und morgen besser machen, was ihr heute noch nicht möglich war. Und sollte sie wirklich einzelne Sätze der Schrift nicht deutlich verstehen, so fahre sie nur fort, das was sie wirklich versteht, ihrem Kinde fortdauernd einzuüben oder vielmehr mit ihm in's Auge zu fassen und kindlich und mütterlich zu betrachten. Sie wird das nicht lange fortsetzen, ohne daß ihr das Undeutliche und Unausführbare von Tag zu Tag deutlicher und ausführbarer in die Augen fällt. Indem sie das thut, schreitet sie auch ohne ihr Zuthun von Tag zu Tag weiter vorwärts. Das, was sie nicht weiß und nicht kann, schließt sich unmittelbar an das an, was sie besitzt und thut. Auch muß der Mutter auffallen, daß die meisten aufgestellten Uebungen sich unmittelbar an das freye Treiben und Leben der Kinder anschließen, und ihre Hülfe darf nur als eine leise Nachhülfe dessen, was die Natur und ihr Instinkt am Kinde, ohne alle weitere Handbietung der Menschen, ohnehin, aber freylich lückenvoll und unvollkommen thut, angesehen werden. Daß die erste Bildungsepoche des Kindes mit weit größerm Erfolg von einer Mutter besorgt werden kann, wenn sie hiefür in ihrer Jugend genugthuend gebildet worden, unterliegt keinem Zweifel. Wo dieses aber nicht geschehen ist, da muß man aus einem Mißgriff und aus einer Lücke, die in der dießfälligen Bildung stattgefunden, nicht mehrere machen, und nicht der Verewigung der Zeitirrthümer durch Erhaltung der Unthätigkeit und des Nichtsthuns selbst Hand bieten. Bist du Mutter und also verpflichtet, Mutterpflichten an deinem Kinde zu erfüllen, so darfst du nicht mehr fragen: „was hätte ich in der Jugend lernen sollen, wenn ich die Bestimmung, in der ich mich nun einmal befinde, ganz erfüllen wollte?" Du hast jetzt nur zu thun, was deine Pflicht ist; aber dieses so ganz und so gewissenhaft, als es dir immer möglich. Indeß soll uns diese Ansicht auch nicht hindern, uns ernsthaft zu fragen: wie und auf welche Weise müssen wir dem großen Unglück vorbeugen, daß die Mehrzahl der Kinder des Landes Väter und Mütter werden, ehe sie mit Sorgfalt von der Wiege an vorbereitet sind, ihre dießfälligen Pflichten zu erfüllen und sie in ihrer ersten Lebensepoche nicht den nämlichen Mängeln und Lücken unterliegen, denen unser Zeitgeschlecht in einem so hohen Grad unterlegen ist? Von dem dießfälligen Bedürfniß der Zeit innigst ergriffen, muß ich in die Beleuchtung der gegenwärtigen Ansicht mit einiger Umständlichkeit eintreten; denn obwohl ich vollends überzeugt bin, daß eine große Anzahl frommer, edler und erfahrner Mütter die Beweggründe ihrer Pflicht genugthuend finden werden, um den Rath, ohne weiters Hand an den Versuch zu legen, die Anwendung der Elementarmittel, so wie wir sie gegenwärtig publiciren, und besonders diejenigen der Zahl- und Formlehre, mit Muth und Vertrauen auf sich selber an ihren Kindern zu versuchen; so bin ich eben so überzeugt, daß überhaupt die Einwendung: „es werde nicht gehen und von keinem bedeutenden Erfolge seyn", noch lange, sehr lange als unbeantwortet und unwiderlegt angesehn und behandelt werden wird. Man wird fortfahren, mir einzuwenden, die Sache sey in einer Welt, wie die gegenwärtige ist, nicht ausführbar, die Lücken und Fehler, die die Mütter unsrer Zeit durch ihre eigene Erziehung unfähig machen, von dem Geist, der in einer wahrhaft naturgemäßen Bildungsweise vorherrschend seyn und den Erziehungsmitteln, die wir vorschlagen, zum Grunde liegen muß, in ihren Umgebungen und bey ihren Kindern anzuwenden, seyen im Geiste der Zeit zu tief eingewurzelt; sie haben bey ihnen selber ihren Ursprung schon in ihrem ersten kindlichen Alter; sie stammen gleichsam schon seit Menschenaltern von Geschlecht zu Geschlecht bis auf unsere Tage herab und seyen durch die Reihenfolgen dieser langen Epoche immer mit der Zeit fortgewachsen und immer tiefer und härter in alles Thun und Leben, in alles Fühlen, Denken und Handeln unsers Geschlechts eingewurzelt.

Ich muß freylich zugeben, daß sich nicht jede Mutter zu einer solchen eigentlichen Wiedergeburt für die Erziehung und den Unterricht ihrer Kinder berufen fühlen wird; aber ich bin dennoch überzeugt, daß, wie ich eben gesagt habe, wo nicht viele, doch ganz gewiß einige wenige zugeben werden, sie seyen nicht ungeneigt, die Lücken und Mißgriffe ihrer Jugendbildung, die ihnen an der Erfüllung ihrer Mutterpflichten so nachtheilig, so viel immer möglich wieder auszufüllen und ihre bösen Folgen stille zu stellen; sie suchen nur eine gesicherte Wegweisung, Anleitung, Mittel und Handbietung, um ihr diesfälliges Ziel wirklich erreichen und ihre Pflichten gegen ihre Kinder segensreicher erfüllen zu können, als sie selbst fühlen, daß es ihnen gegenwärtig noch möglich sey. So lange der Mensch lebt, ist er auch bestimmt, noch zu lernen, und die edlern Mütter, welchen Standes sie auch immer sind, werden in der Angelegenheit, um die es jetzt zu thun ist, fühlen, daß es ihre Pflicht ist. Ich wende mich also mit Vertrauen an sie, und freue mich, ihnen sagen zu können, die Handbietung und Wegweisung, die sie selber wünschen, ist ihnen leicht zu verschaffen; sie liegt ihnen allenthalben an der Hand, wenn sie nur mit dem Ernst suchen, der hiezu nöthig ist. Wenn die schwächern von ihnen das in dieser Schrift für sie Niedergelegte mit einer, in der Erziehung und im Unterricht geübtern und gebildetern Person lesen und sich von ihnen das ihnen allenfalls Unverständliche erklären lassen; so werden sie dadurch sehr bald eine große Erleichterung in ihren diesfälligen Bestrebungen finden. Eine Handbietung, die vielen Müttern noch näher liegt und besonders schwächern, ältern und ermüdeten Müttern vorzüglich zu dienen geeignet ist, besteht darin, wenn sie allfällig eine, auch nur zwölf bis dreyzehnjährige Tochter hat, die mit jugendlichem Frohsinn, Muth und Lebendigkeit diese Uebungen mit ihr ins Auge faßt; so wird diese ganz gewiß sich weit schneller als die Mutter die Erlernung dieser Mittel eigen machen und in Stand kommen, dieselben ihren jüngern Geschwistern beyzubringen, und so der treuen, liebenden, aber schwachen und ermüdeten Mutter in der Erfüllung ihrer Pflichten an die Hand zu gehen; und indem sie dieses thut, und ihre ältere Tochter zur Mithülfe an der geistigen und gemüthlichen Ausbildung ihrer jüngern Geschwister mit ihr Theil nehmen läßt, wird sie dadurch auch vieles, sehr vieles dazu beytragen, diese Tochter auf eine vorzügliche Weise zur künftigen Erfüllung ihrer Mutterpflichten vorzubereiten und fähig zu machen. Mehr als das häusliche Leben ist nichts in der Welt geeignet, solche Töchter dahin zu bringen, das was jetzt ihre Pflicht ist, ihren jüngern Geschwistern und später ihren eigenen Kindern mit Erfolg beyzubringen, sich selbst in dem Grad und in der Vollendung einzuüben, die nothwendig ist, um es andern wieder mit Erfolg beybringen zu können. Das Auslernen auf jeder Stufe der Bildung und folglich die Fähigkeit, das Andern mitzutheilen, was man gelernt hat, ist der Eigenthümlichkeit des naturgemäßen Unterrichts wesentlich. Das ist besonders in Rücksicht auf die Einübung von Gegenständen, die bey der lernenden Mutter eine, in so weit und für den bestimmten Punkt, auf dem sie im Unterricht mit ihren Kindern steht, genugthuende, geistige Bildung voraussetzt, wichtig. Im Fall aber eine solche schwächere und ermüdete Mutter sich der Mithülfe einer solchen eigenen Tochter nicht erfreuen kann, so muß sie natürlich ihre Zuflucht zu einer fremden Mithülfe nehmen. In diesem Fall aber ist dann auch sehr nothwendig, daß sie in der Wahl einer solchen Gehülfin auf eine gemüthliche, frohsinnige, heitere, jugendlich belebte und gewandte Person falle, und dieselbe, als wäre sie ihre eigene Tochter, zur Theilnahme und Mithülfe in der Erfüllung ihrer Mutterpflichten anziehe und auch sie selber unter der Aufsicht ihres Mutterherzens dafür belebe. Sie muß diese Gehülfin in eine Lage und in eine Thätigkeit versetzen, in welcher die Lücken und Fehler ihrer eigenen Erziehung durchaus weder Nahrung noch Reiz finden können. Das vorzüglichste und wesentlichste Mittel hiefür wird indeß ganz gewiß dieses seyn, wenn sie in Verbindung mit ihrer Gehülfin ununterbrochen dahin trachtet, daß alles was ihren jüngern Kindern und durch sie eingeübt wird, auf eine solche Weise und in einer solchen Vollendung geschehe, daß diese, auf welchem Punkt des Unterrichts sie in jedem Fall stehen, immer auch in den Stand gesetzt werden, das was ihnen eingeübt worden, auch Andern mitzutheilen. Das was der gegenseitige Unterricht zu leisten und zu geben fähig ist, wird seine wahre Gestalt und seine wahre Bedeutung erst dann ganz erhalten, wenn der Unterricht im häuslichen Leben auf den Punkt gebracht wird, auf welchem man es als ein unerläßliches Bedingniß desselben ansehen und anerkennen muß, daß jedes Kind das was ihm durch diesen Unterricht eingeübt worden, auch in den Stand gesetzt werden müsse, wieder Andern mitzutheilen, und daß man durchaus nicht annehmen dürfe, daß es sein Unterrichtsfach und auch den Punkt, auf dem es in demselben steht, wirklich verstehe, bis es darin zur Fähigkeit der Mittheilung an Andere gebracht worden ist. Wird dieser Unterricht in seinem innern Wesen zu dieser Vollendung erhoben und diese innere Vollendung auch in ihren äußern Formen in die gehörige Uebereinstimmung gebracht, welches beydes zu erzielen eine wesentliche Aufgabe der Elementarbildung ist; so wird auch die Härte der mechanischen Form, über die man jetzt bey dem diesfälligen Unterricht noch vielseitig klagt, und mit ihr die Schranken des Einflusses dieses Unterrichts, der ihrem geistig unbelebten Zustand nothwendig beywohnt, gänzlich wegfallen und sein Einfluß dadurch ganz gewiß einen tiefer greifenden und segensreichern Erfolg erhalten, als man sich dessen gegenwärtig noch vielseitig gar nicht zu erfreuen hat. Besonders wird der Hebel der Eitelkeitsreize und persönlichen Reibungen, der in dem gegenwärtigen Zustand dieses Unterrichts hie und da noch so grell benutzt wird, im ganzen Umfang seines verderblichen Einflusses dadurch so viel als völlig wegfallen. Es liegt im Wesen des naturgemäßen Unterrichts und folglich auch im Wesen aller elementarischen Unterrichtsmittel, daß sie die kindliche Natur durch sich selbst ergreifen und folglich den Hebel der Sinnlichkeit und der Leidenschaften überflüssig zu machen geeignet sind; und dieses ist unstreitig die wichtigste und segensreichste Eigenschaft, die im Wesen dieser Unterrichtsweise liegt, und immer in dem Grad, in dem sie in der Reinheit ihres eigenthümlichen Wesens gegeben wird, sicher erzielt wird, und durch sie dem enseignement mutuel, eben wie jeder Form, in der ihr Wesen ernsthaft mit psychologischen Takt festgehalten wird, auch erzielt werden kann. Ich füge den Mitteln, die ich den Müttern, welche sich zur allgemeinen Benutzung unsrer Uebungen noch zu schwach finden, vorgeschlagen habe, noch ein wesentliches bey. Unsere diesfälligen Schriften werden nicht lange erschienen seyn, so werden sehr bald allenthalben Beyspiele aufgestellt werden, wo jede Mutter, deren Herz sie Hülfe suchen lehrt, Hülfe, Rath, Wegweisung und Handbietung dazu finden wird. Wenn je in einer Sache das Wort wahr ist: „wer sucht, wird finden, und wer anklopft, dem wird aufgethan werden," so ist dieses ganz gewiß sehr bald in der gegenwärtigen Angelegenheit der Fall. Das Wesen unsrer vorgeschlagenen Unterrichtsmittel ist von einer Natur, daß sie, beydes, das öffentliche Wohl und das Privatinteresse der einzelnen Haushaltungen in dem Grad anspricht, daß ganz gewiß sehr bald nach ihrer Erscheinung hie und da Anstalten zur Bildung von Erziehern und Erzieherinnen nach diesen Grundsätzen errichtet werden müssen, aus denen allseitige Hülfe für jede Haushaltung, die ihrer bedürftig seyn wird, hervorgehen dürfte. Die Sache ist auf einen solchen Punkt einleuchtend, daß die Theilnahme des Menschengeschlechts an derselben nicht mehr lange ausbleiben wird und nicht mehr lange ausbleiben kann. Ich sehe noch einer Einwendung entgegen, die bey der gegenwärtigen Aeußerung der diesfälligen Ansprüche an die Mutter ganz gewiß nicht mangeln wird, zu erscheinen. Man wird nämlich fragen: warum sollen diese Ansprüche, wenn sie auch wirklich zum Theil nothwendig und ganz gewiß gegründet sind, an die Mutter allein und nicht ebenso an den Vater gerichtet seyn? Ich antworte, dieser Einwurf kommt gänzlich nur aus dem Mißverstand der Ansprüche selber her, die diesfalls an die Mutter geschehen sind und nothwendig geschehen müssen. An sich selbst gehört die Bildung des unmündigen Kinds bis in das 4te und in den Anfang des 5ten Jahrs so viel als ausschließlich dem zarten und in diesem

Zeitpunkt im ganzen Umfang seiner Wahrheit mehr als beym Vater instinktartig belebten Mutterherzen zu; der Vater wird aber insonderheit in Rücksicht auf seine Knaben sehr frühe zur Theilnahme an den mütterlichen Einfluß angesprochen werden. Wie die Einheit der Menschennatur im Wesen des reinen, häuslichen Lebens ihre erste und reinste Nahrung findet, so findet sie dieses eben so sehr im innigsten Zusammenhange des väterlichen und mütterlichen Einflusses auf ihre Kinder. Sie sind in dieser Rücksicht schon instinktartig vielseitig ein Herz und eine Seele. Sie werden es in einem weit höhern Sinn durch die Wirkung jedes Strahls von Weisheit und Tugend, die ihre Herzen beleben; am allermeisten und am allerherrlichsten durch den Einfluß des frommen Glaubens, daß ihre Kinder, so wie sie selber, Kinder Gottes sind, und daß sie im höchsten Sinne des Worts einer, aus Liebe und Glauben hervorgehenden, religiösen und christlichen Bildung für ihr zeitliches und ewiges Wohl bedürfen. Bey alle diesem ist gleich wahr, der Vater wird, insonderheit in den gebildetern Ständen, weit später und schwerer von dem segensvollen Einfluß der Anwendung der elementarischen Bildungsmittel im frühsten, kindlichen Alter überzeugt und ergriffen werden, als die Mutter. Die thatsächliche Anschauung steht dem Erfahrungskreise der Mutter weit näher als demjenigen des Vaters. Die Mutter wird unstreitig die innere Belebung, die diese Mittel schon im 3ten und 4ten Jahr bey ihrem Kind erzeugen werden, viel früher bemerken, als er. Es ist ganz gewiß das Zeugniß der liebenden und dadurch erfreuten Mutter, das ihn zuerst auf die Natur dieser Mittel aufmerksam machen wird; und Mütter! es ist darum auch ganz gewiß mit Recht, daß ich mich in meiner Hoffnung, daß das weibliche Geschlecht in Rücksicht auf den Erfolg dieser Mittel in der ersten kindlichen Epoche des menschlichen Lebens durch die Erfahrung eher lebendig ergriffen wird, als die Männer. Nein, nein, ich habe mich diesfalls ganz gewiß mit Recht zuerst an euch gewandt. Aber sobald der Vater von dem Zeugniß eurer Erfahrung auf diese Erscheinung aufmerksam gemacht werden wird, so wird es ihm von dem Augenblick an eine Lust und Freude werden, in den Stunden seiner Erholung mit euch an den geistigen Bildungsmitteln seiner Kinder Theil zu nehmen, und in mehrern Rücksichten wird er es sehr bald mit einem größern Erfolg thun, als ihr selbst. Die Realkenntnisse der elementarischen Bildungsmittel, besonders in Zahl und Form, liegen, insonderheit in dem Aeußerlichen ihrer gewohnten Formen, der männlichen Bildung näher als der weiblichen; auch ist der männliche Sinn an sich selber in der Richtung seiner Bildung in geistiger Hinsicht eben so vorzüglich einfach, als der weibliche Sinn in gemüthlicher Hinsicht Einfachheit halber den Vorzug vor dem männlichen besitzt. Es ist unstreitig, da bald jeder Vater in den Fertigkeiten des Zählens, Messens, Rechnens und Zeichnens, die mit den elementarischen Bildungsmitteln der Zahl- und Formlehre so innig zusammenhangen, stärker ist als das weibliche Geschlecht, so wird er, sobald er die Kraft, die diese Uebungen auch auf seine, noch der Unmündigkeit nahe stehenden Kinder ihrer Natur nach haben und haben müssen, mit dem väterlichen Wonnegefühl Theil nehmen, das dem mütterlichen wesentlich ganz gleich kommt. Die väterliche Theilnahme an der Geistes- und Kunstbildung ihrer Kinder auch im frühsten kindlichen Alter wird in den broderwerbenden Ständen von der Lage und den Umständen unendlich mehr befördert, als in den höhern. Die Landwirthschaft und der Handwerksstand begünstigt die frühe Theilnahme der Väter an der geistigen und Kunstbildung ihrer Kinder in einem weit höhern Grad, als dieses in den höhern Ständen der Fall ist. Diese aber hätten die diesfällige väterliche Mithülfe in eben dem Grad nothwendiger, als ihre Umstände und Lagen die Reize und Mittel von ihnen entfernen. So wie die niedern Stände durch thätige Theilnahme an dem Broderwerb ihres Hauses Reize und Mittel zu ihrer geistigen und gemüthlichen Ausbildung finden, so sollten die höhern Stände in Künsten und Wissenschaften Reize und Mittel finden, sich für die äußere Thätigkeit und Arbeitsamkeit, die der Mensch unter allen Umständen und in allen Lagen des Lebens nöthig hat, naturgemäß zu bilden.

Auf den Gesichtspunkt zurückkehrend, von dem ich eigentlich ausgegangen, fällt es auf, daß der diesfällige Irrthum, als ob ich die Theilnahme des Vaters an der Bildung und Erziehung seiner Kinder für weniger wichtig achte, als diejenige der Mutter, in jedem Fall auch nur auf den ersten Zeitpunkt des kindlichen Alters statt finden konnte. Dieser Irrthum ist aber hoffentlich gehoben. Es wird niemand mehr entgehen, daß ich die Dringlichkeit der Mithülfe des Vaters auch in ihrer vollen Bedeutung erkenne, und daß die Mittel der Elementarbildung diese Mithülfe, besonders in Rücksicht auf die Zahl- und Formlehre, früher und tiefer greifend ansprechen, als dieses ohne ihr Daseyn und ihren Einfluß nie der Fall war und nie der Fall seyn konnte. Bey dem Eintreten der Kinder in die Schulfähigkeit und in die Schuljahre wird aber die Stellung des Vaters in der Familie erst recht in seiner ganzen Bedeutung und in seiner ganzen Wichtigkeit in die Augen fallen. So wie das Kind in das schulfähige Alter eintritt, und also einen Theil des Tages der Schule oder einem, die Schulbildung zu ersetzen bestimmten Privatunterricht anvertraut wird, schreitet es in den elementarischen, ja öfters schon in den wissenschaftlichen Kenntnissen und Fertigkeiten in einem Grade vorwärts, der allgemein die Einsicht und die Kraft der Mutter übersteigt. Aber das häusliche Leben darf dennoch weder von der Mutter noch von dem Vater als etwas von der Schule Getrenntes in's Auge gefaßt und behandelt werden. Es besteht in der Natur zwischen dem häuslichen Leben und der Schule eine Einheit und Harmonie, die von der Kunst und am wenigsten von Vater und Mutter nie einen Augenblick darf aus den Augen gelassen werden. Die thätige Theilnahme des Vaters an dem Unterricht seiner Kinder, besonders seiner männlichen Kinder, darf durchaus nicht verschoben werden. Der Zusammenhang des häuslichen Lebens mit der Schule ist in der Einheit der Menschennatur gegründet. Sie aber, diese Einheit der Menschennatur, ist von der Wiege an das vorherrschende Fundament aller naturgemäßen Erziehungsmaßregeln, die auf allen Punkten der menschlichen Bildung aus der Gemeinkraft der Menschennatur und hinwieder aus der hierin begründeten Gemeinkraft der väterlichen und mütterlichen Nachhülfe erzeugt und hervorgebracht werden müssen. So wie in der frühern Epoche von der Mutter gefordert werden darf, daß sie ihr Kind auch geistig bis zu seiner Schulfähigkeit zu erziehen und zu unterrichten als eine ihrer ersten Pflichten ansehe, der sie sich nicht entziehen kann; so darf und soll eben so in der jetzigen Epoche von dem Vater gefordert werden, daß er diesen Einfluß in Verbindung mit der Schule auf die ganze elementarische Bildung des Kindes ausdehne und zum Theil wirklich daran persönlich Theil nehme. Will er, was er unumgänglich seyn soll, auch als männliche und väterliche Hauptstütze der Erziehung seiner Kinder in seiner Haushaltung dastehen, so darf er sich dieser Pflicht durchaus nicht entziehen. Thut er es nicht, so wird er sehr bald aus der Wahrheit und aus der Kraft seiner diesfälligen Stellung herausfallen. Sucht er aber diese Stellung, wie er soll, mit Ernst in Wahrheit und Kraft zu erhalten, so wird ihm dieses ganz gewiß nicht schwer werden. Gelangt die Mutter bey'm Mangel ihrer Bildung und bey den Lücken, die sich frühe in dieselbe eingeschlichen haben, durch guten Willen, durch Muth und Kraft selbst Hand ans Werk zu legen, in ihrem frühern Kreise nach und nach dahin, ihre geistigen Mutterpflichten dennoch zu erfüllen; so wird es dem Vater doppelt leicht werden, wenn er sich mit der nämlichen Ueberwindung und Hingebung seiner diesfälligen Pflicht unterzieht. Er kann dieses beynahe in allen Verhältnissen, in denen er lebt, um so viel leichter, da von ihm diesfalls weit aus weniger Zeit als von der Mutter gefordert wird. Er ist nicht Schulmeister, er ist nicht Lehrer seiner Kinder, er ist nur väterlicher Erzieher, Leiter und Stütze ihres Unterrichts und ihrer Lehre. Aber das soll er in Wahrheit und Liebe ganz seyn. Er soll den Geist und das Wesen des Schulunterrichts seiner Kinder so richtig und sicher beurtheilen können, als wenn er ihr wissenschaftlicher Lehrer selber seyn müßte. Das aber ist er nicht und soll es nicht seyn. Er muß eigentlich mehr lernen, den Einfluß der fremden Mithülfe richtig zu beurtheilen, als in diesem Einfluß eine Hauptperson vorzustellen. Der Geist, in dem er geschehen soll, muß ihm sehr klar werden. Dadurch wird er genugsam fähig, über den Werth der Ausführungsmittel richtig zu urtheilen. Der eigentliche wissenschaftliche Unterricht darf von den Vätern durchaus nicht gefordert werden. Man darf von ihnen diesfalls nichts fordern, als was allgemein ihre Pflicht seyn kann und seyn soll, und folglich auch nur das, was sie sich in ihrer Lage und in ihren Umständen allgemein eigen machen können, wenn sie nur wollen, und das, was in gegenwärtiger Schrift für die Schule aufgestellt worden, liegt ganz im Kreise dessen, was man von einem Vater, der die geistige Bildung seiner Kinder zu lenken für seine Pflicht achtet, mit Recht fordern darf und kann, und will er sich, wie er soll, auf diese Stufe des Einflusses und der Einsicht dessen, was seine Kinder in der Schule in diesem Fache lernen, erheben, so wird nothwendig, daß er sich mit allen, in diesem Buche für die Schulen aufgestellten Uebungen, eben wie die Mutter, bekannt und vertraut mache, und in den Stunden, in denen er frey hat, auch einige diesfällige Uebungen mit seinen Kindern selbst machen. Er muß aber in seinem diesfälligen Einfluß nothwendig zu dem Frohsinn und zu der Heiterkeit seiner kindlichen Jahre, ich möchte hinzusetzen, mit der Anmuth der mütterlichen Liebe, hinabsteigen, und seine Vaterkraft darin gleichsam verschleyern, damit sie im Helldunkel ihrer Erscheinung desto kraftvoller bildend auf seine Kinder einwirke. So wie die Mutter das innere Leben des Kinds vorzüglich ergreift, so bringt der Vater dasselbe beym Eintreten in seine Mitwirkung auf die Erziehung mehr mit seinem äußern Leben und mit seiner physischen Theilnahme an den Gegenständen, in denen es geistig vorwärts schreiten soll, in Uebereinstimmung. Er sucht die Fertigkeiten, die dem Kind im häuslichen Leben nur noch zart und gleichsam nur vorbereitend eingeübt werden, zu kraftvoll gebildeten Anwendungsfertigkeiten zu erheben und das Kind an eine wachsende Anstrengung in alle dem, was einst seine künftige Pflichterfüllung von ihm fordern wird, zu gewöhnen. Das Kind muß in diesem Alter nicht mehr blos allein mit dem zarten Gefühl der Liebe für den Gehorsam belebt werden, es muß in diesem Zeitpunkt eben so wenig mehr allein durch das Interesse, das es an dem Gegenstand seines Unterrichts selbst nimmt, zur Thätigkeit an demselben bewogen werden; es muß in diesem Zeitpunkt anfangen, von der Pflicht des Gehorsams und der Anstrengung seiner Thätigkeit überzeugt und belebt zu werden. Die frühere, freye Vorbereitung zu diesen ernstern Ansichten, die ihm jetzt habituel gemacht werden müssen, ist indeß von der äußersten Wichtigkeit. Diese große Epoche der Vorbereitungszeit für die Schulen geht bey der gegenwärtigen Erziehungsweise in den meisten Ständen beynahe ganz verloren, und jedermann weiß, wie viel und was für Zeit auch neben der Schule für die Kinder verloren geht; und man darf nicht nur mit Recht diese verlorne Zeit bedauern, sondern man darf sich noch mit viel mehr Recht über die übeln Gewohnheiten und Fertigkeiten, die es in dieser müßigen Zeit annimmt und sich eigen macht, beklagen; dieses ist auch einer der Beweggründe, die jeden für das Wohl seiner Kinder warm belebten Vater bewegen müssen, in der Epoche der Schulbildung seiner Kinder nicht unthätig und theilnehmungslos neben der Schule dastehen zu müssen, sondern sich fähig zu machen, mit Einsicht und Sachkenntniß darauf Einfluß haben zu können.

So wie die Mutter ihre Töchter zu dem bilden soll, was das häusliche Leben in seinen reinsten Verhältnissen anspricht; so soll dieses der Vater in Rücksicht auf alles, was das bürger=

liche und öffentliche Leben anspricht, für seine Söhne auch thun und thun können und thun lernen. Den Vater aber in dem zu behelfen, was hiefür erfordert wird, ist ganz gewiß leichter, als es war, den Müttern hiefür genugthuende Handbietung zu leisten, indem sich für das schulfähige Alter wenigstens immer noch einige Hülfsmittel vorfinden, die freylich noch lange nicht das sind, was sie seyn sollen, aber doch weit mehr als das, was den Müttern von der Kunst als Handbietung zu dem, was sie als Führerinnen und Leiterinnen der ersten Epoche des geistigen Lebens ihrer Kinder bereitet vorfinden sollten und durchaus nicht vorfinden. Die Väter sind im allgemeinen durch das, was sie in ihrer eigenen Bildung selber genossen, weit mehr in Stand gesetzt, ihre Söhne dahin zu bringen, daß sie ihren Brüdern und allenfalls ihren Schwestern mittheilen können, was sie durch die Schule besitzen und sich erworben, als dieses die Zeitmütter durch die Bildung, die sie selber genossen, im Allgemeinen durchaus nicht sind. Dieser Gesichtspunkt ist in unsern Tagen von ganz besonderer Wichtigkeit; denn wenn es je der Fall war, daß dafür gesorgt werden müsse, daß die Lücken und Fehler, die in eine Zeiterziehung sich eingeschlichen und durch Jahrhunderte erhalten, so ist es gewiß gegenwärtig der Fall; und es ist auffallend, daß das erste Mittel, diesem Zeitbedürfniß mit Erfolg entgegenzuwirken, darin besteht, daß die Jugend unserer Nachwelt jede bessere Erkenntniß und jede größere Fertigkeit und Gewandtheit, zu der sie gebildet werden, auf eine solche Weise eingeübt und ihr eigen gemacht werden, daß sie im Stand und geneigt werden, dieselbe auch ihren Kindern in dem Grad und in der Vollendung einzuüben, als sie sie selber besitzen. Und wenn ich im Anfang dieser Bogen ausgesprochen, daß die Mutter weit eher und weit lebendiger auf den Standpunkt dieser Ansicht hingeführt und dafür begeistert werden könne, so ist es ganz gewiß eben so wahr, daß die Väter, wenn sie einmal auf diesen Gesichtspunkt hingelenkt sind, in sich selber und in ihrer Bildung weit mehr Kraft und Mittel der Kunst finden werden, als dieses im Allgemeinen bey den Müttern der Fall ist. Das ist aber freylich nur durch eine reine und hohe Erhebung des Vater- und Mutterherzens zu erzielen möglich. Väter und Mütter! Mütter und Väter! nur dadurch ist es möglich, euch den höchsten menschlichen Segensgenuß zu verschaffen und zu sichern, nämlich daß euren Töchtern die Erfüllung heiliger Mutterpflichten und euren Söhnen die Erfüllung heiliger Vaterpflichten leicht und zum innigsten Bedürfniß wird.

Endlich, wenn ich meinen Gesichtspunkt bis jetzt nur in Rücksicht auf die Väter und Mütter des Landes ins Auge gefaßt habe, so finde ich dennoch, ehe ich diese Vorrede schließe, nothwendig, denselben auch noch in Rücksicht auf jede und alle Personen, die sich im Land der Erziehung widmen, mit eben diesem Ernst ins Auge zu fassen.

Es ist dringend und wichtig, daß sie alle die wichtige Aufgabe ihres Lebens von dem Standpunkt, den wir so eben berührt und den

Vätern und Müttern des Landes ans Herz gelegt haben, ins Auge fassen, und fähig und geneigt werden, ihre Schüler und Zöglinge vorzüglich in dem kraftvoll und brauchbar zu bilden, was sie einst als Väter und Mütter ihren Kindern einzuüben vorzüglich verpflichtet seyn werden. Niemand wird die weitgreifenden Folgen verkennen, die von dem desfällig solid eingeübten Einklang der Schule und des häuslichen Lebens zu erzielen nothwendig und möglich sind. Sie ruhen wesentlich auf der Erkenntniß der Wahrheit, daß die Entfaltung der Kräfte und Anlagen der Menschennatur den Einübungsmitteln der Gewandtheiten und Fertigkeiten, die die Anwendung dieser Kräfte und Anlagen erheischen, vorhergehen sollen. Das aber ist in einer Welt, wo man allgemein die Anlagen der Menschennatur durch die vorhergehende Einübung der Fertigkeiten ihrer Anwendung und nirgends, nirgends die Fertigkeiten und Gewandtheiten der Anwendung dieser Kräfte aus der vorhergegangenen Entfaltung dieser Kräfte und Anlagen selber hervorgehen macht. Das ist aber in einer Welt eine harte Rede, das an vielen Orten gar oft das Jammerwort: wer mag sie hören — nach sich ziehen möchte. Wir dürfen uns nicht täuschen, dieses Jammerwort muß bey dem Schulgeist und bey den Schulansichten, die bey der Menge herrschend sind, beynahe allgemein besorgt werden. Desto dringender aber ist es auch, daß Beyspiele aufgestellt werden, die durch ihr Wesen geeignet sind, dieser wichtigen Besorgniß mit Erfolg entgegenzuwirken. Es müssen Schulen und Anstalten errichtet werden,

den, die einige der wesentlichsten Gesichtspunkte und Uebungen, die wir in diesen Bogen aufzustellen suchen, auf eine Weise anschaulich machen und ins Licht setzen, die allen weitern Zweifel darüber auszulöschen geeignet sind, indem sie jedermann, der sich über diesen Gegenstand zu unterrichten und zu bilden wünscht, hiefür genugthuende Mittel an die Hand bieten. Aber jedes Individuum, das die Aufgabe der Begründung einer solchen Schule mit Erfolg zu lösen auf sich nehmen will, muß sich nicht nur im Stande fühlen, die Zöglinge, die man ihm allfällig anvertrauen wird, nach den in diesen Bogen aufgestellten Grundsätzen und Gesichtspunkten also zu führen, daß sie nicht nur selber vorzügliche väterliche und mütterliche Grundstützen der Erziehung und Bildung ihrer eigenen Kinder werden; ein solches Individuum muß ferner noch im Stande seyn, den Einfluß seines Unterrichts und seiner Bemühungen auch auf die Eltern seiner Zöglinge auszudehnen.

Ich muß schweigen. Man wird mir einwenden: die Eltern unserer Zeit werden dessen nicht wollen, und ich werde den Mann nicht finden, der das auf eine Weise thun könnte, wie es geschehen müßte, wenn man auch nur von Ferne die Hoffnung schöpfen wollte, daß es mit gesegnetem Erfolg geschehen könnte. Ich weiß es, die Stimme ist laut und allgemein: die alten Köpfe im Land müssen aus jedem Plan, der sie für die Erziehung und den Unterricht ihrer Kinder auf irgend eine besondere Art ansprechen könnte, ganz weggelassen werden. — Ich bin nicht der Meynung. Das Wesen der Menschlichkeit ist den alten Leuten so wenig ganz fremd, als den jungen. Ich bin auch alt und spreche in meinem achtzigsten Jahre mit der Jugend meiner Nachwelt, und zwar mit eben der Lebhaftigkeit, wie auch sie, das Wo aus: nihil humani a me alienum puto. Ich setze hinzu: wenn die Alten im Land von der Mitwirkung an allem guten Neuen in der Welt müßten weggelassen werden, so wüßte ch den wesentlichsten Anknüpfungspunkt alles Guten, der immer von gereiften Ansichten kommen muß, nicht zu finden. Wahrlich, man kann bey sehr großen Altersschwächen sehr gereifte Ansichten in sich selbst tragen. Man schone der Schwächen des Alters, aber man stelle es doch nicht auf die Seite. Ich weiß zwar wohl, die größere Zahl der Eltern, Lehrer und selber der Schriftsteller und Schriftgelehrten, die den praktischen Theil des Erziehungswesens und zwar in einigen Fächern mit großer Verkünstelung behandeln, hat nicht einmal eine dunkle Ahnung dessen, was mit so vielem Recht von einem jeden Individuo, das praktischen Einfluß auf das Erziehungs- und Unterrichtswesen zu haben sich anmaßt, in Rücksicht auf die wesentlichen Fundamente der Naturgemäßheit, oder welches eben so viel ist, der elementarischen Solidität, dieser großen Aufgabe des Menschengeschlechts und des ganzen Umfangs der Mittel ihrer Kunst gefordert werden darf und gefordert werden soll.

Wenn schon ganz gewiß ist, daß unsere Zeiteltern im Allgemeinen die geforderte Näherung mit den Lehrern und Erziehern ihrer Kinder nicht suchen und nicht annehmen werden, und wenn eben so gewiß ist, daß dergleichen Lehrer, die mit Recht eine solche Forderung an die Näherung und tiefere Einwirkung auf die Eltern ihrer Zöglinge machen dürften, noch eine lange Zeit eine seltene Sache seyn werde, so ist gleich wahr, daß alles Gute und Wahre in der Welt immer von dem Einzelnen, das dem Wahren und Guten am nächsten steht, ausgeht und ewig davon ausgehen muß. Man wird also ewig nur einzelne Väter, einzelne Mütter, einzelne Erzieher und einzelne Lehrer finden, die diese Wahrheit anerkennen und deren Anerkennung und Wachsthum befördern helfen werden. Aber durch diese Einzelnen wird sich die Mehrzahl in dem Verhältniß vermehren, als die Anerkennung durch die Einzelnen hinlänglich begründet seyn wird. Es ist auch meine erste Pflicht, diesen einzigen möglichen Gang, durch welchen die Ansichten der gegenwärtigen Schrift bey der größern Anzahl edler Menschen allmählig Eingang finden und Fuß greifen können, fest im Auge zu behalten, und so viel mir möglich ist, das Meinige zu thun, diesen Gang einzulenken und anbahnen zu helfen. Ich wende mich desnahen auch am Ende meiner Vorrede an die edeln Männer, welche die Wahrheit dieser Ansicht mit mir erkennen werden, mit der Bitte, alles zu thun, daß einzelne Versuche, die sich dem großen Ziel unserer Bestrebungen auf irgend eine Weise nähern, so schwach sie auch immer seyn mögen, auf alle mögliche Weise geschont, begünstigt und beholfen werden, und daß besonders hie und da Schulen und Anstalten errichtet werden, worin Jünglinge und Mädchen in den wesentlichen Grundsätzen der elementarischen Erziehung solid unterrichtet und eigentlich selber zu Erziehern und Erzieherinnen erzogen werden. Edle Männer, die ihr schon seit so langem mich in meinen Lebensbestrebungen selber in ihrem noch sehr unreifen und in ihrer äußern Erscheinung tief in Koth getretenen Zustande eurer warmen Theilnahme und Mitwirkung gewürdigt, die gegenwärtig zu publicirenden Blätter werden euch vielseitig beweisen, daß diese Versuche nicht nur einer höhern Reifung fähig, sondern daß sie auch wirklich dazu gelangt sind.

Edle Männer! Prüfet die Aeußerung meines Herzens und meines Glaubens, die ich hiemit mit Vertrauen in euren Schoos werfe, und wenn ihr sie wahr findet, so weiß ich von selbst, daß ihr diesen letzten Bestrebungen meines Lebens eben die Aufmerksamkeit und eben die Theilnahme schenken werdet, die ich bisher von euch genossen und für die ich euch aufrichtig mit warmem Herzen danke. Ich ende also meine Vorrede. So viel ich auch über den Inhalt der gegenwärtigen Schrift noch zu erinnern hätte, so glaube ich, wenn man die in dieser Vorrede angegebenen Gesichtspunkte näher prüfen und die in derselben aufgestellten Grundsätze und ihre Mittel anzuwenden und auszuführen versuchen wird; so sey auch jede nähere Erörterung ganz überflüssig.

Zahl- und Formlehre.

Die Zahl

als

Typus der geistigen Entwickelung des Kindes durch das häusliche Leben.

Tausendfache Erfahrungen bestätigen, daß das Leben, beydes, bildend und mißbildend auf das ganze menschliche Geschlecht einzuwirken geeignet ist und wirklich einwirkt. Bildend ist seine Einwirkung, wenn man der Natur in dem, was sie ohnehin thut, nachhilft, mißbildend aber ist sie, wenn der Gang der Natur durch den Eindruck des Lebens und die Einmischung einer fehlerhaften Nachhülfe gestört wird. Der Trieb zur naturgemäßen, wirklichen Bildung liegt im unverdorbenen Reiz jeder menschlichen Kraft, sich selber in Uebereinstimmung mit allem, was göttlich und rein menschlich in unsrer Natur liegt, zu entfalten und uns zur äußerlichen Anwendung unsrer Kräfte für die Befriedigung des ganzen Umfangs unsrer wirklichen Bedürfnisse zu befähigen; der Trieb der Mißbildung hingegen entspringt aus dem Uebergewicht des Einflusses unsers Fleisches und Blutes über die Ansprüche unsers Geistes und des Göttlichen und Ewigen der Kräfte und Anlagen, die der Menschennatur eigen sind. Die wahre Menschennatur liegt nicht im Fleisch und Blut, das ich mit den Thieren des Felds gemein habe, sie ist selbst das Göttliche und Ewige der Kräfte und Anlagen, die ausschließend in meiner Menschennatur liegen und die ich mit keinem Geschöpf der Erde, das nicht Mensch ist, gemein habe. Dieses Göttliche und Ewige unterordnet die physischen Ansprüche meiner Natur. Es lehrt mich meinen Hunger befriedigen, aber nicht das Bedürfniß meiner Nahrung durch sinnliche Reize unnatürlich steigern und mir dadurch selbst schädlich machen. Die Wahrheit dieses Unterschieds unterliegt keinem Zweifel; jedermann sieht die Nothwendigkeit ein, daß die Personen, welche auf die Bildung des Kindes in ihrer ersten Epoche Einfluß haben sollen, in den Stand gesetzt werden müssen, ihren dießfälligen Einfluß auf die Bildung desselben mit dem, was die Natur selber hiefür thut, d. i. mit dem Wesen des Selbsttriebes, der in ihm liegt, nach diesem Gesichtspunkt in Uebereinstimmung zu bringen. Hieraus folgt ferner, daß es eins der ersten Bedürfnisse der menschlichen Bildung ist, einen Typus oder Reihenfolge von Bildungsmitteln aufzustellen, die dießfalls Genüge zu leisten im Stande sind. Zahl und Form sind aber in Verbindung mit der Sprache die einzigen, ursprünglichen, im Kinde selbst liegenden Ausdrücke der Kräfte der Natur, deren Triebe und Reize zur Entfaltung der geistigen Anlagen in ihm vorzüglich benutzt werden müssen. Soll das Leben nach diesem Gesichtspunkte in seiner ganzen bildenden Bedeutung aufgefaßt werden, so erscheint es uns nach drey

Richtungen, die sich in ihrer ganzen Bedeutung sehr wesentlich von einander unterscheiden und bis auf einen gewissen Punkt auch selbstständig und unabhängig von einander sind und also benutzt werden müssen.

Die erste und ursprüngliche dieser Richtungen geht aus dem häuslichen Leben und seinen Verhältnissen hervor, die zweyte aus dem niedern und höhern Schulunterricht, die dritte aber aus dem selbstständigen, öffentlichen und Privatleben selber. Ein Unterrichtsfach in seiner ganzen bildenden Bedeutung dargelegt, muß demnach diese drey Epochen umfassen. Soll es dem großen, bildenden Einfluß des Lebens in allen Richtungen und auf eine naturgemäße Weise entsprechen, so wird vor allem aus nothwendig, daß die erste Bildungsepoche als die wichtigste und wesentlichste ins Auge gefaßt werde. Hiebey ist aber gar nicht zu verkennen, daß die Mittel der Kunst, die hiefür in allen drey Epochen zu benutzen sind, in denselben in mehrern Rücksichten auf eine verschiedene Weise begründet werden müssen. Die Sicherheit ihres Erfolgs geht in allen drey Epochen wesentlich von der genugthuenden Begründung und Solidität der ersten Bildungsepoche des Kindes aus. Jeder Mißgriff in derselben führt zu unabsehbaren Schwierigkeiten, Lücken und Fehlern in den zwey spätern Epochen und untergräbt gleichsam den eigentlichen bestimmten Naturboden derselben.

Das, was durch die Kunst für die erste und früheste Epoche der Bildung des Kindes gethan werden kann und gethan werden soll, allgemein ins Auge fassend, versuche ich hier die Behandlung der Zahl und Form, wie sie in diesem Alter des Kindes, unabhängend von ihrem Kunsteinfluß auf die Entfaltung der Sprachkraft desselben angewandt und benutzt werden soll, darzulegen.

Bis in sein sechstes oder siebentes Jahr gehört das Kind seiner ersten Bildungsepoche an. Die Kunst trennt in diesem Alter in der Entwickelung seiner geistigen Kräfte und Anlagen weder die Form, noch die Zahl, noch die Sprache von einander; sie bleiben in derselben eben so innig vereinigt als sie im dießfälligen Gange der Natur in der Entfaltung der Kräfte des Kindes innig vereinigt dastehen. Eine Art von Trennung der dießfälligen Kunstmittel gehört jedoch der Schule an. So wahr indeß dieses auch ist, so ist der gegenwärtigen Darlegung um der Mutter willen, die die eigentliche Lehrerinn dieser ersten Epoche ist, nothwendig, daß die Zahl von der Form getrennt behandelt werde. — Was in der Natur Zahl und Form halber vereinigt ist, und in dem Gebrauche für die Mutter, die ihr Kind naturgemäß führt, vereinigt bleiben muß, wird in der gegenwärtigen Darstellung als getrennt erscheinen, um ihr eine leichte Wegweisung, durch welche sie mit Sicherheit zu ihrem Ziel zu gelangen vermag, an die Hand zu geben. — Es geht aber den Anfangspunkten des Kunsteinflusses der Mutter in der Zahl-, Form- und Sprachlehre eine Epoche voraus, die in ihrem innersten Wesen auf sie sowohl als auf das Kind ganz instinktartig und von aller Kunst unbeholfen einwirkt. Ich berühre auch diese Epoche mit ein paar Worten näher. Die Mutter hilft dem Kind in dieser frühesten Epoche zum ersten Gefühl der Kraft seiner Glieder, so wie des Eindruckes, den die äußern Gegenstände auf seine Sinne machen; sie hilft ihm sogar zum ersten Bewußtseyn des in ihm erwachenden, innern geistigen Lebens, das sich in der Freude, im Leid, im Lächeln, im Betrübtseyn rc. rc. äußert, ganz ohne Kunst, nur durch ihre instinktartig in ihr selbst belebte Theilnahme und Mitwirkung. Erst wenn die instinktartige Gewalt dieses gegenseitigen Einflusses anfängt sich zu schwächen und mit den höhern Wesen der Menschennatur in Uebereinstimmung zu gelangen, beginnt die Epoche, in welcher sich die Besonnenheit und der Wille der Mutter auf der einen Seite, und die Anfangspunkte der Besonnenheit des Willens selber im Kinde auf der andern Seite vom Instinkte sondern, und alsdann tritt der Einfluß der Kunst zur Weiterführung alles dessen, was der Instinkt durch seinen Einfluß auf die Glieder, Sinne und Organe selber auf den Anfang der geistigen Belebung des Kindes vorbereitend gewirkt hat, ein. Das Kind muß also schon in dieser Epoche dahin geführt werden, daß es seine Glieder im ganzen Umfang seiner Bedürfnisse gebrauchen lerne, daß es seine Sinne im Anschauen und Auffassen der Gegenstände seiner Umgebungen übe und sich endlich zur Fertigkeit, sich wörtlich darüber ausdrücken zu können, erhebe. Hieraus wird klar, daß das Kind in dieser Epoche noch nichts will und nichts thut, wozu es nicht durch irgend ein Bedürfniß oder irgend einen Reiz seiner Natur aufgefordert und genöthigt wird. Demnach muß es durch seine natürlichen Bedürfnisse zu einer es bildenden Thätigkeit, Anstrengung und Aufmerksamkeit geführt werden, ohne hiefür ein künstliches oder gewaltsames

Reizmittel in Bewegung zu setzen und in Anspruch zu nehmen.

Diese erste Epoche des Kindes dauert lange, und der Uebergang desselben in diejenige, in welche die Kunst eigentlich eintritt, muß genau und fest ins Auge gefaßt werden. Bey diesem Uebergange wechselt der Instinkt mit dem Höhern der Menschennatur und der ihr nachhelfenden Kunst gegenseitig ab, bis endlich das Letztere allmählig so weit das Uebergewicht erhält, daß das Kind dem Bedürfniß der Belebung durch den mütterlichen Instinkt enthoben, zu der Epoche emporreift, welche unbedingt als schulfähig anerkannt und behandelt werden muß.

Das Alter, in dem diese Abwechslung statt findet, ist sehr verschieden. — Von dem dritten Jahre aber kann der Einfluß der Mutter, ihr Kind durch irgend eine Kunst führen zu wollen, als sehr unbedeutend angesehen werden. Hier ist nicht außer Acht zu lassen, daß Klima, Geschlecht und andere innere und äußere Umstände zur frühern oder spätern Reifung der Kunstführung des Kindes wesentlich beytragen. Sie dürfen nicht unbeachtet bleiben; wenn man nicht zu frühzeitige oder unreife Früchte haben will.

Als unbestreitbar geht aus diesem hervor, wie wichtig es ist, daß der Zweck der naturgemäßen Erziehung des Kindes auch in der Epoche, in welcher der Instinkt der Mutter die Kunstführung ersetzt, nicht aus dem Auge gelassen werde. Durch den Instinkt belebt, wirkt die Mutter auf eine Weise auf ihr Kind, die durch keine Kunst ersetzt werden kann. Seine persönliche Selbstthätigkeit tritt aber hiebey als das göttliche, durchaus unersetzbare Fun=

dament der Nachhülfe, die der Gang der Natur in dieser Epoche anspricht, wieder an seine Stelle. Die Mithülfe, die die ältern Kinder der Mutter oder wohlgebildete Hausgenossen ihr hiefür leisten, ist nur durch ihre persönliche Leitung, Mitwirkung, Aufsicht und Theilnahme für ihr Kind — von wirklich gutem und gesegnetem Erfolge; sie wird nur dadurch naturgemäß begründet und in ihren Folgen sicher gestellt.

Alle dießfälligen Hülfsmittel führen ohne mütterliche Begründung ihres naturgemäßen, innern Geistes und Lebens in diesem Zeitpunkt zu ganz unpassenden Schulmeister-Mitteln, verbunden mit affenartiger Nachahmung des Muttertons, der Mutterworte und selber der Muttertreue, die ohne alle Wahrheit und ohne alle Folgen, außer den gezwungenen Resultaten, welche das in diesem Alter unnatürliche und mühselige Lernen hervorbringt, das Gepräge der Selbsttäuschung an der Stirne tragen. — Das Kind ist in diesem Alter wohl bildungs-, aber nicht schulmäßig lernfähig, und soll auch vor seinem sechsten oder siebenten Jahre nicht in dieses, ihm unnatürliche Joch gespannt werden. Das durch die freye, vorbeygehende, häusliche Bildung nicht psychologisch wohl begründete, schwache und jeder Ausartung fähige und leicht empfängliche Schuljoch ist der Tod der wahren Bildung des häuslichen Lebens, zu der das Kind in diesem Alter in einem so hohen Grad fähig ist und die man in der ganzen Reinheit ihres Segens benutzen sollte.

Ich fasse die durch Zahl und Form zu bezweckende Bildung des Kindes von dem Augenblick an ins Auge, in welchem seine instinktartige Bildung vollendet seyn soll, und halte den Zeitpunkt fest, in welchem diese instinktartige Nothwendigkeit die Mutter nicht mehr mit der nämlichen Gewalt an ihr unmündiges Kind kettet, sondern in welchem sie ihm durch die besonnene Kunst nachzuhelfen fähig ist. In dem Grad als der Instinkt bey der Mutter in allem, was ihr Kind bedarf, sich verringert, und seine Nothwendigkeit verliert, muß dieses Verlorne durch die Kunst ersetzt werden, wenn sein Bildungsgang nicht gehemmt, gestört oder gar still gestellt werden soll. — Es kommt hier hauptsächlich darauf an, daß die Mutter diesen ihren instinktartigen, ja nothwendigen Trieb unvermerkt für das Kind an die Kunst anzuknüpfen verstehe. — Um dieses zu erreichen, ist wesentlich, daß auch in der Kunstführung weder Fächer noch Stundeneintheilungen statt finden, sondern daß jedesmal die Gelegenheit, die Belebung und das Bedürfniß des Moments ergriffen und durch die Kunst hinzugesetzt werde, was ohne dieselbe nicht leicht anhaltend und mit Kraftaufwand fortgesetzt werden kann. Zu diesem Endzweck gelangt man vorzüglich dadurch, daß der oft nur vorübergehende Thätigkeitstrieb des Kindes, der auf irgend einen Gegenstand gerichtet ist, so weit und ohne besondere Reizmittel gefesselt werde, daß er ihm durch seinen bildenden Einfluß auf seine Auffassungskraft geläufig gemacht werde. Uebertreibung und Gewalt, die allenthalben nachtheilig und schädlich ist, wird dieses beym Kind in diesem Alter doppelt. Dieser Umstand ist ganz vorzüglich in der Epoche wichtig, in der es durch den Instinkt der Mutter geleitet und geführt werden muß.

Doch der wahre Instinkt thut keinen solchen Mißgriff. Er ist so einfach, so sicher, ja so nothwendig, daß er auch der Kunst als Leitfaden dienen könnte und nicht unbenutzt gelassen werden sollte. Ich will also versuchen, zu zeigen, wie dieses durch Uebungen und Reihenfolgen, welche die Entfaltung der Geistes-Kräfte durch die Zahl zum Zwecke haben, statt finden müsse, wenn die berührten Grundsätze befolgt und der Anfang da gemacht wird, wo die Kunst wirklich einzutreten beginnt. Ist ein Kind in irgend einem Augenblick mit etwas beschäftigt, woran sich ein einfaches Mittel des Zählens anknüpfen läßt; so muß die Mutter diesen Moment benutzen. Ich setze den Fall, es spiele mit Aepfeln, Erbsen, Steinen ꝛc., oder sein Spiel sey an seinen Fingern oder an irgend etwas anders, das ihm Freude macht, geknüpft, so wird die Mutter suchen, Theil an diesem Spiel zu nehmen und ihm zeigen, wie diese Körper als ein, oder zwey, oder als drey solcher Gegenstände gesondert von den andern neben einander gelegt werden können. Im Anfang und zwar ziemlich lange wird sie die Zahl immer an den Gegenstand geknüpft ins Auge fassen, und wenn es mit Steinen spielt, das Kind nie sagen lassen, eins, zwey ꝛc., sondern immer, ein Stein, zwey Steine ꝛc. Die Abstraction der Zahl von dem Körper, der sie darstellt, folgt erst, wenn das Kind dieselbe auf die mannigfaltigste Weise mit den Gegenständen verbunden ins Auge gefaßt und sich eingeübt hat.

Ein Kind so zu führen, daß das Auffassen der Zahlverhältnisse einen besondern Reiz erhält, gehört vorzüglich dieser Stufe an; z. B. wenn es mit Aepfeln spielt, so kann die Mutter einige derselben schnell zusammen bringen, sie dann wieder trennen und es jedesmal rathen lassen, wie viele derselben allemal bey einander seyen? Es versteht sich, daß im Anfange gar nicht zu hohen Zahlen geschritten werden darf. — Aber man wird mir einwenden: das Kind kann ja noch nicht zählen und das Errathen setzt es doch voraus. Ich erwiedere: das eigentliche Zählen muß nicht als eine besondere Uebung behandelt, sondern mit dem, was ich gegenwärtig aufstelle, innig verwoben werden. Dieses wird auch Mißgriffen abhelfen, das Zählen lernen als einen Mechanismus zu behandeln, der keine Anschauung zum Hintergrunde hat. Nicht selten ist dem Kind, das Zählen sich bloß mechanisch eigen zu machen, der eigentliche Tod seiner wahren Anschauung und Auffassung der Zahlverhältnisse geworden. Es ist unrichtig, die Zahlverhältnisse als eine Uebung des Gedächtnisses behandeln zu wollen, die keines Hintergrunds der Anschauung bedürfen. Eine solche Behandlungsweise ist nicht nur nicht bildend, sondern dem, was durch das Bildende dieser Behandlung erzielt werden soll, geradezu entgegen. Auf keinen Fall darf man das Kind im Anfang zu Zahlen führen, die es sich nicht durch seine zehn Finger anschaulich zu machen im Stande ist. Mit diesem ist aber noch nicht gesagt, daß es gleich über einmal bis zum Zählen geführt werden müsse. Kann es im Anfang 3, 4, 5 rc. richtig ins Auge fassen, so steigt es mit Leichtigkeit und ohne viel Mühe und Kunst dahin die folgenden Zahlen bis auf zehn, eine nach der andern sich sehr leicht einzuüben.

Ich fahre fort, die Zahl im nämlichen Geist auch an andere Gegenstände und Beschäftigungen, in die das Kind so leicht versetzt werden kann, anzuknüpfen. Z. B. man kann ein Kind, das im Gehen, Springen, Hüpfen u. s. w. begriffen ist, eben so auf die Zahl seiner Schritte, Sprünge ꝛc. aufmerksam machen und es dieselben zählen lassen. Auch kann man, und zwar nur ein wenig später, anfangen es aufzufordern, zu rathen, wie viele Schritte von einem Ort zu einem andern seyen, und es ganz gleich behandeln, wie wenn es sich beschäftigte, Steine, Aepfel, Erbsen ꝛc. der Zahlverhältnisse halber aufzufassen.

So wie man hier nicht zu hohen Zahlen schreiten darf, so muß dieses auch bey der Entfernung, die gegeben wird, berücksichtigt werden. Das Augenmaaß an nicht zu großen Gegenständen üben zu wollen, wird sehr nothwendig berücksichtigt werden müssen. Auf die nämliche Weise kann das Zahlverhältniß auch an den Sinn des Ohrs (das Gehör) gekettet werden. Z. B. Es wird irgend ein Ton hervorgebracht und derselbe einigemal wiederholt und vom Kind gezählt.

Der Vortheil und die Nothwendigkeit, die Zahl durch jeden einzelnen der fünf Sinne dem Kind zum Bewußtseyn zu bringen, leuchtet aus dem, was ich bereits gesagt habe, klar hervor. Daß die öftere Wiederholung einer und derselben Uebung sehr gut und in gewissen Fällen sogar nothwendig ist, unterliegt keinem Zweifel; sie muß aber in einem Geiste statt finden, der dem was ich früher erörterte, ganz zu entsprechen geeignet ist. Neigung, Lust und Freude, die nämliche Uebung mehreremal und selbst aus freyem eigenen Antrieb zu wiederholen, sind nicht nur gute Kennzeichen, sondern unnachläßliche Bedingnisse einer wahren und soliden Behandlung der Zahl auf dieser Stufe. Die Wiederkehrung einer Uebung bis zur Ermüdung oder bis auf den Punkt, auf dem aller Reiz dafür sich verlieren sollte, muß sorgfältig vermieden werden, wenn nicht gerade das Gegentheil von dem erfolgen soll, was man durch solche Uebungen sucht, und auch sicher erreicht, sobald die aufgestellten Grundsätze befolgt werden. Um dieses zu bezwecken, kann man, wenn das Kind müde ist, die Zahlverhältnisse an einem Gegenstande, aufzufassen und sich einzuüben, als Abwechslung zu einem andern Gegenstand übergehen, und ebenso kann eine Abwechslung der Sinne und Organe, durch welche ihnen ihre Verhältnisse anschaulich gemacht werden, statt finden. Daß die Thätigkeit mehrerer Sinne gleichzeitig für den nämlichen Endzweck angesprochen werden dürfe, kann bey dieser Darstellung nicht mehr zweifelhaft seyn. Um der Mutter eine reichhaltigere Auswahl von Beyspielen an die Hand zu geben, schreite ich in den positiven Uebungen, die zu diesem Ziele führen, weiter. Man kann das Kind an einem Gegenstande einzelne Theile aufsuchen lassen: als an dem Tisch die Ecken, an dem Stuhl, an der Bank rc. die Beine, an den Fenstern die Scheiben u. s. w.; dieses muß aber in jedem Falle auf eine Weise geschehen, die für das Kind großen Reiz hat und von ihm als eigentliche Fortsetzung des Spiels, das es von selbst mit diesen Gegenständen treibt oder zu treiben sucht, angesehen werden. Folgendes Beyspiel mag hier ganz seine Stelle finden: Die Mutter bringt einige wenige Aepfel, Birnen, Nüsse ꝛc. zusammen, läßt das Kind dann rathen und zählen, wie viele es seyen; hat es dieses errathen, so gibt man ihm in der Freude eine zum beliebigen Gebrauch, oder belebt seine Thätigkeit hiefür auf irgend eine andere Weise. Die Mutter gibt dem Kind eine Anzahl Gegenstände, mit denen es gerne spielt, läßt sie unter irgend einer Form zusammenstellen und gleichzeitig zählen, so daß es, wenn es mit dem Zusammenstellen fertig ist, auch bestimmt weiß, wie viele solcher Gegenstände im Ganzen seyen und wie viele sich an jedem einzelnen Theil der gegebenen Form befinden. So würde sie z. B. aus irgend einer Anzahl Gegenstände ein Viereck bilden, und das Kind fragen, wie viele derselben sich an einer Seite des Vierecks befinden. Wie sehr die gleichzeitige Thätigkeit mehrerer Sinne und Glieder, für einen Zweck die Kraft und Thätigkeit erhöhen und stärken müssen, geht aus der Erfahrung so klar und einleuchtend hervor daß ich den Zweifler bitten muß, sich durch die Prüfung dessen, was eine Mutter, die ihr Kind also führt, diesfalls zu leisten vermag, zu überzeugen. Alles dieses muß aber mit der Erhaltung der Lebhaftigkeit des Kindes erzielt werden. Man darf es aber nie damit ermüden, auch nie das nämliche Spiel forttreiben lassen, wenn der Geist des Spiels oder das Interesse dafür vom Kinde weichen will. Doch kann dieses Interesse, so weit es wesentlich und nothwendig ist, leicht dadurch erhalten und wieder belebt werden, daß man den Gegenstand in dem oben näher bezeichneten Geist abwechselt und behandelt. Gelangt man aber damit noch nicht zum Ziele, so ist in diesem Fall das Beste, das Kind vollkommen sich selbst zu überlassen. Es wird sich bald wieder mit etwas beschäftigen, in das sich die Mutter sogleich wieder bildend einmischen kann. So kann man unter anderm von der bildenden Einmischung des Zählens zu der des Redens und von der des Redens in die der Formverhältnisse hinübergehen. Dieser freye Uebergang ist aber eine, mit der Einheit der Menschennatur und aller ihrer Kräfte innig zusammenhängende und in dieser Epoche von ihr nothwendig geforderte Maßregel der kindlichen Bildung.

Die oben aufgestellten Uebungen mit der bezeichneten Vielseitigkeit bey Kindern in Ausübung gebracht, kann es nun nicht mehr fehlen, daß es bis auf zehn und leicht auch höher richtig zählen lernen wird, ohne irgend eine besondere Uebung deßhalb anzuwenden, und die Mutter steht mit ihrem Kinde nun auf einem Punkt, auf dem sie mit gesichertem Erfolge jetzt weiter schreiten kann. Sie darf sich der Ausdrücke: Addition, Multiplication u. s. w., mit denen man die verschiedenen Uebungen und Rechenfolgen, die ich hier anführe, gewöhnlich bezeichnet, nicht bedienen, um einerseits nicht zu frühe mit ihrem Kinde in Kunstausdrücke hineinzufallen, die noch nicht begründet sind, anderseits aber, um ihr Kind nicht in den Schulton und in die Schulform hineinzuführen, die der Tod aller Bildung des Kindes im häuslichen Leben ist.

Dieser Ansicht folgend, müssen die Additionsbeyspiele unter folgender Form zur Einübung vorgelegt werden. Bey irgend einem Spiel, z. B. beym Erbsenspiel, nimmt die Mutter dem Kind zuerst zwey Erbsen und fragt es dann:

wie

wie viele Erbsen es habe? Sie gibt ihm noch einmal zwey Erbsen dazu und fragt dasselbe: wie viel es jetzt in allem habe? Es wird antworten, vier. Hernach fängt es von neuem an zu zählen und sagt: 1 und 1 macht 2, noch 1 dazu, gibt 3 und noch 1 gibt 4; oder aber zu 2 noch 1 gethan, gibt 3 und noch 1 zu 3 hinzugesetzt, gibt 4. Die meisten Kinder aber werden es gleich aussprechen und sagen: 2 und 2 gibt 4. So wird dieses fortgesetzt bis auf 10.

Auf ganz gleiche Weise kann man, statt 2 dem Kinde 3 geben, und jedesmal untersuchen lassen, wie viel es ausmache. Sollte man, statt nur bis auf 10, auch zur Zahl 12 kommen, so hätte dieses hier nicht nur nichts zu sagen, sondern als eine kleine Abwechselung wäre es selber gut, damit das Kind auch nach und nach mit Zahlen, die über 10 gehen, vertraut und bekannt würde, ohne daß deßhalb gerade besondere Uebungen statt finden. Daß eben so 4, 5 und noch mehr Gegenstände auf diese Weise zusammen gezählt werden können, geht aus dem Gesagten und Ausgeführten so thatsächlich hervor, daß jede weitere Erörterung über Gesichtspunkte dieser Art überflüssig wird. Um die Kraft zur Festigkeit im Zusammenzählen zu bilden und in abgeänderten Darstellungsformen zu üben, kann man das Kind auf einmal zwey und mehrere Zahlen zusammenstellen lassen. Z. B. Man fragt es: Wie viele Erbsen hast du, wenn ich dir 1 oder 2 Erbsen zugleich gebe, hernach aber wieder 1 oder 2 davon wegnehme? Weiter als es dieses aber mit Leichtigkeit und ohne merkliche Anstrengung zu beantworten im Stande ist, darf dieses in keinem Fall fortgesetzt werden. Es kann dem Beobachter der menschlichen Kräfte nicht entgehen, daß, so wie das Kind in den einfach gegebenen Beyspielen des Zählenlernens vorschreitet und darin zur Festigkeit und Sicherheit gelangt, auch das Fundament mit gedoppelten, verdreyfachten Zahlen u. s. w. auf die gleiche Weise vorzuschreiten, gelegt, und die Bahn, hierin naturgemäß weiter zu gehen, geöffnet ist.

Eine sehr passende Uebung dieser Bildungsstufe im Zusammenzählen ist auch diese noch: Man gibt dem Kinde eine Anzahl Kirschen, Erbsen, Würfel (Kubus) oder auch andere Gegenstände, läßt sie auf irgend eine Weise zusammenstellen, gibt ihm noch einmal 5 solcher Gegenstände, und begehrt, daß es sie anders zusammenstelle. Dieses setzt man so lange fort, als das Kind irgend eine Veränderung zu machen im Stande ist. So würde es finden, daß es 5 entweder als 5, oder als 4 und 1, oder als 3 und 2 u. s. w. zusammenstellen kann. Es ist aber gar nicht darum zu thun, das Kind so lange damit sich üben zu lassen, bis es alle möglichen Zusammenstellungen dieser Zahl 5 erschöpft hat; sondern nur, bis sich die Kraft im Auffinden der Verschiedenheit der Zusammensetzung dieser Zahl gehörig entwickelt hat.

Eben so geht aus den aufgestellten Grundsätzen klar hervor, daß man nicht nur bey einer Zahl stehen bleiben dürfe und vorzüglich bey niederen Zahlen, als 2, 3 u. s. w., angefangen werden müsse, sondern daß dieses auf jede Zahl ausgedehnt und angewendet werden könne. Sollte die Mutter es nöthig finden, das Zählenlernen bey ihrem

Kinde auch noch auf höhere Zahlen auszudehnen, so könnte es auf folgende Weise geschehen. Sie knüpft dieses an einen Gegenstand an, für dessen Besitz das Kind ein Verlangen äußert, als etwa Nüsse, Kirschen, Würfel, Markorkügelchen, mit denen es gerne spielen würde, und gibt demselben so viele als es zu zählen im Stande ist. Kommt es auf den Punkt, von dem aus es nicht weiter zählen kann, so setzt es die Mutter selbst fort, indem es jedesmal den Gegenstand, während dem sie es ausspricht, zu denjenigen hinzufügt, die das Kind schon besitzt. Auf diesem Wege hat sie es ganz in ihrer Macht, die Höhe der Zahl zu bestimmen, mit der das Kind vertraut und bekannt werden soll. Wie sehr man aber hier mit Vorsicht zu Werk zu gehen hat, um nicht zu schnell zu hohen Zahlen mit dem Kinde zu kommen, ist bereits genugsam erörtert. Vorsicht ist hier um so nothwendiger, als man sich auf diesem Wege so leicht verirrt und dieser Grundsatz immer nicht gehörig gewürdigt wird. — Wird die Mutter dem Kinde sagen: „wenn du Morgen diese Gegenstände wieder zählen kannst, so erhältst du sie noch einmal," dann darf sie sicher seyn, daß es dieses im nämlichen Moment so lange wiederholen wird, bis es sich deren Erlangung sicher gestellt hat.

Diese Zahloperationen können mit Leichtigkeit an die verschiedenartigste Thätigkeit des Lebens angeknüpft werden. Das Kind hat großes Interesse, seine Thätigkeit an alle es belebenden Dinge, die ihm Freude machen, zu knüpfen. Es knüpft sie gerne an die Töne der Mutter. Diese ergreift daher die Aufmerksamkeit und Thätigkeit des

Kindes, und sucht auch die Zahlverhältnisse an dieselbe anzuschließen, und zwar auf folgende Weise: Sie giebt 2 oder 3 mal einen Ton von sich, wiederholt denselben ein zweytesmal und läßt sie zählen, wie wenn es Körper wären. Auch kann sie mehrere Töne nach einander von sich geben und zwar zuerst langsam, dann schneller und dieselben von dem Kinde zählen lassen. Nachdem es sie gezählt hat, wird es in der obigen Form zum Zusammmenzählen angehalten.

Auf gleiche Weise kann diese Uebung auch an sein Gehen, Hüpfen, Schlagen u. s. w. geknüpft werden. Je größer die Theilnahme an irgend einer Beschäftigung des Kindes ist, desto leichter können auch Uebungen der Zahlverhältnisse mit derselben verbunden werden. Ein Kind, das mit der Mutter geht, wird besonders gerne seine Schritte zählen, und zwar auf folgende Weise: sie geht einige Schritte mit ihm vorwärts und läßt dasselbe bald laut, bald leise seine Schritte zählen. Ist das Kind noch sehr jung und geht es langsam, so ist dieses Gehen mit seiner Ungeläufigkeit im Zählen übereinstimmend und zum Fassen der ersten Begriffe der Zahl vortheilhaft. Hier aber muß ich einem Mißgriff vorbeugen, der, nachdem ich diese Form der Darlegung wählte, sich sehr leicht einschleichen könnte.

Ich trenne in dieser Darlegung die Zahl von der Form gänzlich, und bringe die verschiedenen Zahlverhältnisse unter Gesichtspunkte, die von einander unabhängig und unter sich getrennt sind, während in dem Alter, in welchem diese Uebungen mit dem Kinde statt finden, noch keine

Trennung eintreten darf. Diesem Grundsatze zufolge wird man zur Abwechslung wohlthun, wenn man gleichzeitig an einem und demselben Gegenstande alle Zahlopeationen, deren das Kind fähig ist, vornimmt, ohne sich an eine einzige der in gegenwärtiger Darlegung getrennten Uebungen zu binden. So können gleichzeitig Additions-, Subtractions- und Multiplications-Beyspiele an einem Gegenstand vorgenommen werden. Ich bemerkte gleich im Anfange, daß ich diese Darstellungsweise nur deßwegen gewählt habe, um der Mutter eine deutliche und faßliche Anleitung von allem dem, was durch Zahl und Form in diesem Alter beym Kinde gethan werden kann, zu geben. Alle diese unter der Form des Zusammenzählens statt gefundenen Uebungen können auf gleiche Weise unter die Subtractionsform gebracht und müssen dem Kinde mit der nämlichen Ausdehnung zur Uebung vorgelegt werden. Will und kann aber die Mutter dieses leicht mit der Additionsform verbinden, so hat dieses sein Gutes und kann zuweilen zur Abänderung statt finden. Alle für die Addition aufgestellten Grundsätze und Maßregeln, die die Freyheit und Selbstständigkeit des Kindes zum Fundament haben, müssen auch hier in dem ganzen Umfang benutzt und angewandt werden, wenn diese Uebung für dieses Alter dem Kinde wahrhaft bildend gegeben werden soll.

Alle obigen Beyspiele können in umgekehrter Stellung benutzt werden. Um aber der ungeübten Mutter die dießfällige Mühe zu erleichtern, füge ich diesen noch einige Beyspiele bey.

Die Mutter gibt ihrem Kinde etwa 6 Aepfel und sagt ihm: gib mir einen, deinem Vater zwey, und deinem Bruder 3 davon, und siehe dann, wie viel dir noch übrig bleiben. Das Kind thut dieses und findet am Ende, daß es keinen Apfel mehr hat. Sie fährt weiter und sagt ihm: gib von deinen 6 Aepfeln jedem von uns einen, und siehe wie viel dir dann noch übrig bleiben. Das Kind wird finden, daß ihm noch 3 Aepfel übrig bleiben. So kann sie über die Aepfel noch einige ähnliche Fragen aufstellen, deßgleichen über andere Zahlen und andere Gegenstände.

Die Finger als Typus der Anschauung der Zahlverhältnisse zu benutzen, ist in mehreren Beziehungen von großer Wichtigkeit. Sie sind als Anschauungsgegenstand immer zur Disposition des Kindes bereit und stehen mit dem Decimalsystem im innigsten Zusammenhange. Ihre dießfällige Behandlung ist fürs Kind in einem hohen Grad bildend, um so mehr, da auch sie schon in diesem Alter zur Thätigkeit in den verschiedensten Beziehungen befähigt und benutzt werden müssen. Zur Erheiterung dieser Ansicht folgen hier einige Beyspiele. Die Mutter sagt zum Kinde: Strecke deine 10 Finger an deinen beyden Händen aus, und biege hernach wieder 2 davon ein, wie viel Finger wirst du alsdann noch ausgestreckt haben? Hier können sie Versuche anstellen, bald diese 2 Finger, bald zwey andere einzubiegen. So mit drey, hernach mit 4, 5 Fingern u. s. w. —

Daß diese Uebung gleichsam auch als Gymnastik der Finger für alle Kunstfertigkeiten, die es sich einst noch ganz besonders eigen zu machen hat, angesehen und behandelt werden könne, wird jeder Mutter, die dieses beobachtend und aufmerksam mit ihrem Kinde einübt, bald einleuchten. Eben so wird ihr nicht entgehen, daß dieses auch im Schreiben, im Zeichnen, in der Instrumentalmusik, in so fern ihr Kind früher oder später sich diese Fertigkeiten eigen zu machen hat, sehr weit führen muß. Nicht weniger geschickt sind aber ähnliche Uebungen und dienen als Fundament zu allen Arten weiblicher Arbeiten, als zum Nähen, Stricken, Sticken, Brodieren u. s. w. Aber am wichtigsten sind sie dennoch im allgemeinen, um die Hand und die Finger des Kindes für jede Anwendung und Benutzung fähig und geschickt zu machen. Schon aus diesem geht klar hervor, wie jede bildende Uebung mit der ganzen künftigen Bestimmung des Kindes zusammenhängt und in diesem Alter nicht als etwas einseitig vom Leben getrenntes ins Auge gefaßt und behandelt werden soll. Allgemein kommt es hier sehr viel darauf an, daß die gegenseitige Theilnahme der Mutter und des Kindes immer sehr belebt bleibe. Ich setze dieses durch einige Beyspiele noch mehr ins Licht. Die Mutter, die mit ihrem Kinde die Stube auf und abgeht, sagt zu ihm: Wir wollen jetzt die Schritte zählen. Sie geht mit ihm zwey Schritte vorwärts, dann wieder einen Schritt rückwärts und fragt dasselbe: um wie viele Schritte es vorwärts komme? Hernach gehen sie drey Schritte vorwärts und wieder einen oder zwey Schritt zurück, und die Mutter fragt das Kind wieder: um wie viele Schritte es vorwärts gekommen sey? So kann sie ihm andere Gegenstände geben, und davon wieder nehmen lassen.

Ich habe mich bey der Addition und Subtraction so umständlich geäußert und so vielseitig durch Beyspiele klar zu machen gesucht, wie die erste Bildungsepoche des Kindes durch Mütterliche Kunst besorgt werden müsse, daß ich mich in den künftigen Uebungen kürzer fassen darf.

Als Uebung in der Multiplicationsform mögen daher folgende Beyspiele hinreichen.

Die Mutter fordert das Kind auf, einmal, zweymal, dreymal zwey Birnen oder andere Gegenstände, mit denen es spielt, zu nehmen oder zu wiederholen und fragt dasselbe, wie viel es gebe. So werden drey, vier Gegenstände mehreremal wiederholt und zusammengestellt und jedesmal wird untersucht, wie viel es gebe.

Die Mutter: du issest in einem Tag dreymal, wie vielmal wirst du in 2, 3 Tagen oder in einer Woche essen?

Eine andere bildende Form ist die Umkehrung der Verdoppelung der Gegenstände in ihre Zerlegung oder in ihre Vertheilung. Sie ist gewöhnlich unter dem Namen „Division" bekannt.

Die Mutter gibt dem Kinde 2 Erbsen, und läßt es dieselben in 2 gleiche Theile theilen, hernach läßt sie es mit 4, dann mit 6, 10, 12 rc. das nämliche fortsetzen. Dann gibt sie ihm 3, 6, 9, 12 Gegenstände, mit denen das Kind gerne spielt, und läßt es dieselben in 3 gleiche Theile theilen. Mit 4, 5 und mehr gleichen Theilen, kann sie das nämliche fortsetzen, und sie auch alsdann in ungleiche Theile theilen lassen. Z. B. bey 12 Kirschen, die in 2 ungleiche Theile getheilt werden, wird es 1 und 11 finden, oder 2 und 10 rc. bey 3 ungleichen

Theilen wird es aber, 1, 2, und 9, oder 1, 3, und 8 Kirschen finden.

Ich habe 9 Aepfel für dich aufbehalten, sagt die Mutter zu ihrem Kinde und werde dir alle Tage 3 davon geben; nun fragt es sich, wie viele Tage du daran zu essen haben werdest.

Die Mutter gibt dem Kinde etwa 12 Nüsse und sagt ihm, es solle sie so eintheilen, daß es und sie gleich viel bekommen; nachher läßt sie es wieder so eintheilen, daß der Vater, die Mutter und auch es gleich viel bekommen; dann wieder, daß die Mutter, der Vater, die Schwester und es gleich viel davon bekommen. Kommt zu diesen Personen noch ein Bruder und begehrt man vom Kinde das Gleiche, so wird es finden, daß dieses nicht möglich sey.

Eine andere Weise, die Zahl dem Kinde bildend ins Auge fallend zu machen, ist folgende. Sie wird gewöhnlich mit dem Namen „arithmetisches Verhältniß der Zahl" bezeichnet. Die Mutter gibt dem Kinde 7 Würfel, sie behält einen zurück und fragt es dann, wie viel es mehr habe als sie, dann auch, wie viel sie weniger habe als es.

Aus dem Geist dieser Darlegung geht klar und anschaulich hervor, daß dieses auf eine sehr vielseitige Weise sowohl in Rücksicht der Zahl als auch des Gegenstandes abgewechselt werden soll. Dessen ungeachtet habe ich noch einige von den obigen Beyspielen folgen lassen.

Die Mutter geht mit ihrem Kinde die Stube auf und ab und macht einen Schritt, während dem das Kind immer 2 geht, und läßt dann dasselbe angeben, wie viele Schritte es mehr gemacht habe als sie. Auch umgekehrt, wie viel die Mutter weniger als es gemacht habe. — Sie mischt eine Anzahl Erbsen mit Nüssen, wirft sie auf den Tisch und läßt das Kind rathen, wie viel von dem einen mehr oder weniger seyen als von dem andern; nachdem es gerathen, läßt sie es sogleich zählen, ob es richtig geschätzt habe.

Eben so ist noch folgende Weise bildend, dem Kind die Zahlverhältnisse in die Augen fallen zu machen, und wird gewöhnlich mit dem Ausdruck „geometrisches Verhältniß der Zahl" bezeichnet; jedoch finden hier nur die allereinfachsten Uebungen Platz, wie z. B. wenn du einen Gegenstand, als etwa Aepfel, doppelt auf dem Tisch liegend hast und einen davon nimmst, so hast du die Hälfte der Aepfel genommen und die andere Hälfte bleibt noch. Sie nimmt alsdann 4 solcher Gegenstände und erlaubt dem Kind die Hälfte für sich zu behalten, in so fern es dieselbe zu nehmen wisse. Das Dreyfache wird auf gleiche Weise behandelt und es wird mit der gleichen Leichtigkeit einen Drittel von irgend einer Anzahl Gegenstände nehmen, als es zuerst die Hälfte davon zu nehmen lernte.

Diese Uebung auf zwey und mehrere Drittel ausdehnen zu wollen, wäre für dieses Alter zu schwierig; hingegen läßt man es den Drittel, Viertel, Fünftel u. s. w. von andern Gegenständen nehmen. Daß alle diese Uebungen, so oft es immer mit Freyheit und Munterkeit geschehen kann, wiederholt werden müssen, sollte nicht erst noch erinnert werden; aber da die Sache, wie sie gegen=

wärtig dargelegt, noch neu ist, und mancher Mutter, die sich anfangs nicht ganz leicht zu orientiren weiß, ihre Aufgabe sehr erleichtert wird, wenn ich mich ausführlicher erkläre, so sage ich noch: Es ist nur durch diese öftere Wiederholung, wodurch eine jede dieser Uebungen dem Kinde vollkommen geläufig und unauslöschlich gemacht werden kann. Dieses ist aber bey einer jeden Stufe der Bildung, ehe man aussprechen darf, daß man den Gegenstand naturgemäß behandle und mit Sicherheit weiter schreiten darf, der Fall. Auch muß es der Mutter von selbst auffallen, daß ihr noch mehr Stoff mangle, um dem Kind diese Uebungen genugthuend und allseitig nach diesen Grundsätzen einzuüben. Indessen wird es nicht nothwendig daß ich hierüber eine weitläuftigere Wegweisung gebe, weil unmittelbar auf die Uebungen, die dem häuslichen Leben angehören, in dieser Schrift auch diejenigen des schulfähigen Alters folgen, die der Mutter als Ergänzung dessen, was ihm allenfalls noch mangelt, dienen können. Aber hiebey kommt es dann auch wesentlich darauf an, daß sie im Gebrauche derselben nur so weit gehen, als sie ihre Kinder lebendig ansprechen und belebende Reize für dieselben haben. Was das Kind nur ermüdend ansprechen würde, darf die Mutter durchaus nicht benutzen. Ich fürchte mich bey der gegebenen Darlegung meines Gegenstands vor nichts in der Welt mehr als davor, daß die Mutter durch die Erleichterungsmittel der häuslichen Bildung, die ich so gerne in ihre Hand legen möchte, verleitet werde, in den alltäglichen Schulmeisterton zu verfallen und ihre Kinder auf eine diesem Alter unangemessene und unzarte

Art lehren zu wollen, was darin nur durch bildenden Einfluß in Freyheit, Lust und mit großer Zartheit eingeübt werden muß und durchaus nur durch die wesentliche Eigenheit dieser Epoche erzielt werden kann, die darin besteht, den Kindern das zum Bewußtseyn zu bringen und gleichsam selbst aus ihnen hervorgehen zu machen, was in diesem Alter ihnen naturgemäß beygebracht werden kann. Ich wiederhole, vor dem 6ten und 7ten Jahr muß keine Art von Schulmühseligkeiten und Schullasten auf die Kinder einwirken, indem sie zuerst durch freye Selbstthätigkeit hiefür vorbereitet und auf eine Weise gebildet werden sollen, daß sie diese Lasten in ihrer künftigen Bildungsepoche ohne geistigen und physischen Schaden, froh in sich selbst dafür belebt, tragen können. Dieses zeigt aber auch klar, daß die Kunst, auf solche Weise Mutter zu seyn, und im häuslichen Leben bildend auf die Kinder wirken zu können, vor allem aus erlernt werden müsse. Daß dieses auch mit der Reinerhaltung ihres mütterlichen Instinkts, der im eigentlichen Verstand das geistige Leben alles dessen begründet, wozu das Kind in diesem Alter naturgemäß gebildet werden muß, geschehe, unterliegt nach allem Gesagten keinem Zweifel mehr. So wie auch die kleinsten Anfänge und Spuren der strengen Schulmeisterordnung dem Heil und Segen der freyen kindlichen Entfaltung der Kräfte des Kindes im häuslichen Leben an das Herz greifen, so ist der wahre Geist des reinen häuslichen Lebens in eben dem Grade wesentlich und wichtig auf die Vorbereitung des Schullebens und muß deswegen als die eigentliche Grundlage der Bildung des Kindes angesehen werden. Aber ein Kind zu etwas, das es einst ausüben und treiben soll, vorzubereiten, ist etwas ganz anders, als es dasselbe auch nur von ferne selber treiben lassen, und es ihm praktisch zur Gewohnheit und Fertigkeit machen.

Mit jedem Vorschritt der also in Freyheit und gleichsam durch diesen Selbsttrieb allein erhaltenen Kenntniß wächst im Kinde dieser Trieb, in dieser Kenntniß immer etwas weiter zu kommen von selbst, und je leichter ihm die Schritte bis auf den Punkt, auf dem es wirklich steht, geworden sind, desto sichtbarer und öfter wird der Selbsttrieb, seine erhaltenen Kräfte zu stärken und in seinen Umgebungen weiter zu schreiten, in ihm selbst rege, und der aufmerksamen Mutter sichtbar und leicht benutzbar. Dabey ist noch zu bemerken, daß diese Uebungen in der ersten Epoche eben so wohl als Uebungen des Redenlernens benutzt werden können. In gegenwärtiger Darlegung trete ich aber in dieses Letztere nicht ein und bemerke hier nur so viel: das Kind muß in gewissen Rücksichten in diesem Alter gemeinsam und gleichzeitig eben so bestimmt reden lernen, als es durch die Zahlübungen bestimmt rechnen und durch das Formenverhältniß bestimmt anschauen lernt. Es ist deswegen gar nicht genug, daß das Kind mit den Händen zeigen könne, daß es die ihm aufgegebenen Fragen des Rechnens verstehe; es ist nicht genug, daß es seine Steine, Kirschen, Erbsen, oder was es immer ist, übereinstimmend mit den Aufgaben des Zählens, die man ihm vorlegt, zusammenstellen, trennen und vergleichen könne; sondern es muß sich eben so leicht über das ausdrücken lernen, was es dießfalls erkennt und thut. Die Redeübungen des Zählens sind in Rücksicht auf die Entfaltung der Denkkraft des Kindes weit bildender als bloße Redübungen, die aus der Anschauung einzelner Gegenstände und ihrer Beschaffenheiten hervorgehen. Die Redeübungen, die aus der Aufmerksamkeit auf die Beschaffenheit, Veränderung und Wirkung der Gegenstände, oder welches eben so viel ist, von schicklichen Beschaffenheits- und Zeitwörtern hervorgehen, sind zwar geeignet, eine immer wachsende Klarheit der menschlichen Begriffe zu erzeugen, aber weit weniger als die Uebungen der Zahl, die menschliche Denkkraft an sich selbst zu stärken, zu beleben und zu vielseitiger Anwendung derselben geschickt und brauchbar zu machen. Auch werden die öftern Wiederholungen der sich auf diese Weise eigen gemachten Erkenntnisse sehr wesentlich; aber eben so wesentlich ist es, daß ihre Einübungen das Kind nicht ermüden und ihm nicht langweilig werden. Auch soll man sich durchaus nicht mit Ungeduld sehnen, daß diese Erkenntnisse dem Kind sehr bald geläufig werden, sondern sehr ruhig und selber geduldig warten, bis dieses sich gleichsam von selbst gibt. Wenn das festina lente (Eile mit Weile) in irgend einer Epoche des menschlichen Lebens wesentlich nothwendig und fruchtbar ist, so ist es dieses in der Epoche des häuslichen Lebens und in den Bildungsmitteln, die in demselben anwendbar sind, und deren Fertigkeit und Geläufigkeit durchaus nur langsam erzielt werden kann. Jede Geläufigkeit der Erkenntniß muß beym Kinde durch den Reiz und die Liebe zu irgend einer Beschäftigung, die von ihm als Spiel betrieben wird, erzielt werden. Mindert sich die Liebe zur Wiederholung dieses Spiels, so mindert sich in eben dem Grad das wesentlichste Mittel, die Geläufigkeit schnell zu erzielen und man kommt sicher später zu ihr, wenn man sie aus Ungeduld zu frühe erzielen will. Da es bedenklich ist, durch den Reiz sinnlicher Gelüste und Belohnungen viel auf die Kinder zu wirken, so kann die Lust und Liebe zum stufenweisen Weiterschreiten in den Zahlverhältnissen durch vielerley andere Mittel und Wege, worüber die gegenwärtige Darlegung zeugt, hauptsächlich aber auch durch den Eindruck, den die Lust des Begreifens und Könnens in der menschlichen Seele selbst erzeugt, erzielt werden. Das griechische Wort *αλιθευειν εν αγαπη* — die Wahrheit in der Liebe suchen, hat heute noch auf die menschliche Seele den nämlichen Einfluß wie ehemals.

Nebenbey ist bekannt, daß man den Kindern in diesem Alter verschiedene Dinge in die Hand gibt, die ihre Aufmerksamkeit reizen und sie zu gleicher Zeit naturgemäß belustigen und beschäftigen sollten, die aber gewöhnlich durchaus nicht so gebraucht werden, wie sie wirklich bildend auf sie wirken könnten, sondern auf eine Weise, die sie nur zerstreut und dadurch einen sie wesentlich mißbildenden Einfluß auf sie hat. Die äußerlichen Mittel des Zählen- und Rechnenlernens können dagegen auf eine Weise benutzt werden, die in dieser Rücksicht einen sehr bildenden Eindruck auf die Kinder zu machen geeignet ist. Man gibt ihnen etwa hundert gleiche Kubus, wovon eine Seite ein bekanntes Maß, etwa einen Zoll betragen würde, um sie zusammenzusetzen, zu trennen, kurz ihr freyes, selbstständiges, aber den Geist des Rechnens und Zählens immer belebendes und stärkendes Spiel damit zu treiben. Auch können noch andere regelmäßige Körper, die um einen geringeren Preis in größerer Zahl zu haben sind, für den nämlichen Endzweck in die Hand des Kindes gelegt werden; des gleichen einzelne, auch schwieriger zu verfertigende mathematische Körper.

Instrumente und Maschinen, an denen das Kind seine physischen Kräfte und körperliche Geschicklichkeit zu üben Gelegenheit findet, sind hiefür nicht weniger geeignet. Dinge aber, deren Zusammensetzungen und Trennungen durch das Kind selber nicht leicht gestaltet werden können, gehören unter die wenigen zweckmäßigen Gegenstände seiner dießfälligen Bildung. Am leichtesten lassen sich die Zahl betreffende Fragen an das Kind machen, wenn es mit den hundert gleichen Würfeln spielt und seine verschiedenartigsten Zusammensetzungen macht, besonders wenn die Mutter oder eine ältere Schwester oder Bruder des Kindes mitzuspielen verstehen. Lieblingsspiele der Kinder, die auch zugleich sehr bildend für sie werden können, sind das Bauen und Niederreißen und beyden lassen sich die mannigfaltigsten Uebungen der Zahlverhältnisse sowohl als der Formverhältnisse anschließen. Das Kind wird sich in jedem Fall, wie aus dem obigen schon klar erhellt, am thätigsten und geschicktesten, für die verschiedenen Uebungen der Zahl zeigen, wenn es in Lagen, Verhältnissen und Uebungen ist, die seine Thätigkeit und Aufmerksamkeit am leichtesten, fröhlichsten und gemüthlichsten ansprechen. Folglich wird das Daseyn und die Theilnahme der Mutter

ter bey den verschiedenen Spielen, die das Kind belebend ergreifen, sehr bildend auf dasselbe einwirken.

Die Mutter kann sich zwar in der Erziehung ihrer Kinder allerdings helfen lassen, und da, wo ihre Thätigkeit und Aufsicht nicht hinzureichen vermag, dieses auch durch fremde Personen ersetzen; aber nur durch solche, deren natürlicher heiterer und frohmüthiger Sinn und deren entschiedene Kinderliebe sie sicher stellt, daß sie mit ihren Kindern in allem, worinn sie Einfluß auf sie haben sollen, in dem einfachen, liebenden Geist handeln werden, der allen Müttern, die für die naturgemäße Erziehung ihrer Kinder nicht selbst verdorben sind, instinktartig inwohnt. Man darf durchaus nicht von allen Müttern fordern, daß sie sich ausschließlich mit ihren Kindern beschäftigen; aber das darf man allgemein von ihnen fordern, daß sie sich alle Mühe geben, vollkommen einzusehen, ob die Eigenschaften des Geistes und des Herzens und die Grundsätze, Meynungen, Gewohnheiten und Fertigkeiten der Personen, denen sie Antheil an Mutterwerken, Mutterliebe und Muttersorgfalt anvertrauen will, mit alle dem, was Mutterliebe, Muttertreue und Mutterweisheit erfordern, übereinstimmen oder wenigstens in keinem Stück sichtbar mangeln; und diesen Personen darf sie ihre Mutterpflichten nur untergeordnet anvertrauen. Auch die vorzüglichsten fremden Personen besitzen den mütterlichen Instinkt nicht von Ferne in seinem reinen, kraftvollen Leben, und dieser ist es allein, der eine vollkommene, keine mütterliche Aufsicht fordernde Sicherheit des Einflusses fremder Personen auf fremde Kinder ihrer Bildung halber in diesem Alter geben könnte.

Die Folgen der Mißgriffe, Unbesonnenheiten und aller Arten von Fehlern und Lücken, die die Unaufmerksamkeit auf diesen Gesichtspunkt erzeugt, fangen an, ziemlich allgemein anerkannt und eingesehen zu werden.

Das Kind außer seiner körperlichen und physischen Besorgung, bis ins sechste oder siebente Jahr, sich gleichsam seinem Schicksal zu überlassen, hat die Masse der Jugend vielseitig zu einer Zerstreuung, innern Verödung und Unnatur ihrer Geistes- und Herzensrichtung und besonders bey den niedern Volksklassen zu einer Verwilderung hingeführt, daß man ziemlich allgemein anfängt, auf ernstliche Maßregeln dagegen zu denken und hie und da wirklich dergleichen zu ergreifen. Die sogenannten Kinderschulen (Infant scool) in England, die für einmal nur Kinder bis zum sechsten oder siebenten Jahr aus den Klassen der Armen aufnehmen, ist ein thatsächlicher Beweis dessen was ich hiemit außer Zweifel zu setzen mich bemühe, daß nämlich psychologisch tiefer gegründete Maßregeln für den Unterricht und die Erziehung der Kinder in ihrer ersten Lebensepoche dringendes Bedürfniß der Zeit sind und daß von dieser Seite die Nachforschungen über das Wesen der Idee der Elementarbildung, deren Bestrebungen allgemein von diesem Punkt und von dieser Ansicht ausgehen, die ernste Aufmerksamkeit der Menschenfreunde in einem hohen Grad verdienen, und die dieser Idee halber bisher statt gefundenen Versuche, so wohl in Rücksicht auf ihre Grundsätze als auf die Mittel und den Erfolg ihrer Ausführung eine solide Prüfung mit Recht ansprechen. Es ist unmöglich, den dießfälligen Lücken und Mängeln unserer Jugenderziehung im allgemeinen und zwar in allen Ständen solid abzuhelfen und vorzubeugen, ohne den mütterlichen Einfluß auf die erste Epoche des kindlichen Alters von neuem zu beleben, um ihn aus der Kraftlosigkeit und ich darf in gewissen Rücksichten wohl sagen, aus dem Todesschlaf zu erwecken und mit den Kräften der Mutter auf die Kräfte der Wohnstube, in allen Ständen, in einem hohen Grad zu stärken und zu beleben. Es kann aber keinem geübten Beobachter unserer Zeit entgehen, daß die Erkenntniß, beydes, der Natur und der Nothwendigkeit der Ausführungsmittel dieser so weit führenden Ansicht kaum recht zu entkeimen anfängt und die positiven Ausführungsmittel, wie sie in ihrer Ausdehnung und in ihrem Zusammenhange in unsern Händen seyn sollten, noch so viel als gänzlich mangeln.

Dieß fordert mich aber doppelt auf, die Gesichtspunkte, die ich bisher in Beziehung auf die Zahl dargelegt, auch auf die Form anzuwenden, und die nämlichen Grundsätze auf dieses Unterrichtsfach auszudehnen.

Es ist meine innigste Ueberzeugung, die Grundsätze, auf die es in diesem Alter beym Kind vorzüglich und wesentlich ankömmt, können nicht tief genug erforscht, vielseitig genug in's Auge gefaßt und eben so nicht oft genug wiederholt werden, um denselben allgemeinen Eingang zu verschaffen. Wesentlich ist es in der ersten Bildungsepoche des Kinds, daß man bey ihm auf keinen einzelnen Theil der menschlichen Bildung, weder auf die Anschauungskraft, noch auf die Sprachkraft, weder auf die Zahl- noch auf die Formlehre, weder auf die sittliche noch auf die

Kunstkraft, einen einseitigen und anhaltend künstlichen Einfluß suche; sondern daß man in jedem Augenblick den Einfluß der Kunst auf die Bildung desjenigen Theils der menschlichen Kräfte werfe, die dem Gegenstand, mit dem sich das Kind in diesem Augenblick beschäftiget, am meisten nahe stehet. Jeder Gedanke an eine systematische und anhaltende Ordnung des Einflusses, der dem Geist der Freyheit, der Lieblichkeit und des Frohsinns, der dem Unterricht in diesem Zeitpunkt allgemein und nothwendig beywohnen muß, zuwider ist, muß in demselben sorgfältig vermieden werden. Ich gehe weiter. So wie die Zahl im häuslichen Leben in der frühesten Epoche naturgemäß und bildend für das Kind benutzt werden kann und benutzt werden soll, so muß auch die Form in diesem Zeitpunkt auf gleiche Weise naturgemäß und bildend für dasselbe angesprochen werden. Was ich dießfalls bey der Zahl schon sagte und aufstellte und auch hier seine volle Anwendung hat, wird indessen nicht wörtlich wiederholt. Ich beschränke mich nur auf das, was der Form eigenthümlich zukommt, und fasse dieselbe in gedoppelter Rücksicht ins Auge; erstens als Mittel der Entfaltung der Denkkraft, und zweytens als Mittel der Entfaltung der Kunstkraft. Sie fordert aber zugleich als mitwirkendes Mittel ihres Unterrichts die naturgemäße Entfaltung der Sprachkraft, was ich bereits in der Darlegung der Zahl ins Licht zu setzen gesucht.

Die Form erscheint dem Kind in seinem frühern Alter nur in bezeichneten Umrissen und zwar in geraden, krummen, ebenen und gebogenen Flächen, Linien und Punkten. Die Eindrücke dieser äußern Erscheinung sind eine der wesentlichsten Grundlagen alles dessen, wodurch die Anschauung und Auffassung der Form bildend für das Kind benutzt werden kann. Man muß deswegen diese äußere Erscheinung der Körper für die Denk- und Kunstkraft nach den Gesetzen, die einer jeden eigen sind, zu behandeln suchen.

In der Anschauung des Tisches, der Bank, des Hügels, des Berges und anderer Gegenstände, liegt das Fundament, an das der Begriff von gerad, krumm, hoch, tief, lang, kurz, hohl, erhaben ꝛc. im Kind angereiht und angeknüpft werden muß. Je mehr Gegenstände einer Form von gleicher Art in den Umgebungen des Kinds sich vorfinden, desto eher und leichter kann der Begriff dieser Form, so wie das Wort, das ihn ausdrückt, im Kind begründet werden. Je mehr lange Gegenstände es in seinen Umgebungen hat, desto schneller und fester wird der Begriff von lang, länger und am längsten in ihm entfaltet, und das Wort, das dieses jedesmal ausdrückt, begründet. Das ist bey kurzen, runden, hohlen, gebogenen Gegenständen ꝛc. der gleiche Fall.

Im frühesten Alter beschränken sich die Uebungen, die zur Erkenntniß der Formarten führen, auf die Erscheinung geformter Gegenstände, die sie auf die Sinne des Kindes machen und auf den Eindruck, den diese Erscheinungen auf dasselbe in Verbindung mit der vielseitigen Anhörung des Wortes jedesmal haben, und zwar so, daß jedes weitere Wort zur Erheiterung der dießfälligen Eindrücke in diesem Zeitpunkt nicht nur überflüssig, sondern schädlich würde.

Dieser dunkle Eindruck der verschiedenen Formarten muß vielseitig begründet im Kind vorliegen, ehe man ihm denselben durch Linien oder andere Kunst- und Einübungsmittel des Begriffes dieser Formart vor die Sinne bringt.

Die geraden und krummen Linien sind die ersten und wesentlichsten Fundamente, von denen die Kunstführung der Form, auch in dem frühesten Alter, ausgehet, und führen durch sie, von dem Daseyn und dem Eindrucke der Gegenstände, die vor seine Sinne gebracht werden, zu den eigentlichen Anfangspunkten ihres naturgemäß bildenden Einflusses auf die Entfaltung der Anschauungs- und Auffassungskraft des Kinds.

Es unterscheidet in diesen Uebungen diejenigen Gegenstände am sichersten, leichtesten und schnellsten von andern, ihm ähnlichen Gegenständen, die ihm oft und unter mannigfaltigen Abwechselungen vor seine Sinne gebracht werden, und besonders, wenn sie große und karakterisirende Gestalten haben; Körper von verschiedener Art sind besonders leicht von einander zu unterscheiden.

So ist ein Körper leichter von einer Linie, eine Linie leichter von einem Dreyecke zu unterscheiden. Von den leicht von einander unterscheidbaren Formen, gehet man zu den schwerern und zuletzt zu den schwersten über, die unstreitig diejenigen sind, welche sich am meisten gleich sehen.

Auf diesem Wege muß es dahin gelangen, gleichlaufende Linien von ungleichlaufenden, sowohl geraden als krummen Linien, die Winkel von den Ecken, und zwar diejenigen, die mit krummen, und mit krummen und geraden Linien zugleich gebildet werden, unterscheiden zu können. Vor allem aus aber muß es die Figuren, die sowohl aus geraden, als aus krummen Linien entstanden, kennen und von einander unterscheiden lernen. Um hier einen kurzen Leitfaden dießfalls zu geben, will ich zeigen, wie das Kind zur Auffassung und zum Unterscheiden der geradlinigbegrenzten Form, zu gelangen vermag.

Man zeigt ihm von den Gegenständen seiner Umgebungen alles was es dießfalls aufzufassen und zu beobachten im Stand ist. So kann man ihm an dem eckigten Tische die gleichlaufenden Linien, die Arten der Winkel, als rechte, spitze und stumpfe, die Vierecke und zwar die Quadrate, Rechtecke, Rauten, oder Parallelogramme, Trapetze ꝛc. anschaulich machen. Hat es geradlinichte mathematische Körper als Belustigungs- und Spielgegenstände, so kann die weitere Kenntniß aller Formen leicht an dieselben angekettet und angeknüpft werden. An der regelmässig dreyseitigen Pyramide würde es die gleichseitigen Dreyecke ꝛc. finden. Sollte man diese Körper aber nicht besitzen, so müßten in der Umgebung des Kinds welche aufgesucht werden, die diesem zu entsprechen geeignet wären. Auch das Wohnzimmer des Kinds ist eine ganz hiefür geeignete Umgebung oder ein Raum, an den sich die weitere Auffassung der Formen anknüpfen läßt. So kann man ihm die Flächen und körperlichen Winkel, die gleich- und ungleichlaufenden Flächen ꝛc. an denselben zeigen. Auch diejenigen Formen, die aus krummen Linien und gebogenen Flächen begränzt sind, werden nach der gleichen Ansicht behandelt, worüber das Obige als Typus dienen mag. Vor allem aus muß dem Kind das Rund, das Oval, die Schneckenlinie, das Zweyeck, das Dreyeck, der Bogen, der Viertels = und halbe Bogen, und von dem Winkel müssen ihm die hohlen, die erhabenen, die gemischten bey den krummen Linien zur Kenntniß gebracht werden. Wie das Zahlverhältniß an das Leben und an die Thätigkeit, in der sich das Kind jedesmal befindet, angeknüpft werden muß; also müssen auch die Formen der Gegenstände und ihr Verhältniß zu einander eben so an das Leben des Kinds angeknüpft werden.

Die Mutter liesse z. B. ein Kind, das mit geradlinichten Körpern in einem Spiel begriffen wäre, versuchen, seine Spielgegenstände so zu legen, daß sie eine gerade Linie oder einen Winkel, und zwar zur Abwechselung einen rechten, oder spitzen, oder stumpfen Winkel bildeten. Sie würde es auffordern, andere Formen, als Dreyecke, Vierecke u. s. w. zu bilden. Stellt das Kind dann mehrere Winkel auf, bildet es gleich = und ungleichlaufende Linien, geschlossene Figuren von verschiedenen Formen etc.; so wird die Zahlenlehre mit der Formlehre, mit eben dieser Leichtigkeit, verbunden werden können, was auch, wenn der Gegenstand lebendig betrieben werden soll, nothwendigerweise geschehen muß. Selbst die Sprachlehre soll diesen Uebungen nicht fremd bleiben. Es soll nicht nur zum richtigen Anschauen und Auffassen dieser Formen gelangen; sondern auch zum richtigen Ansprechen des Gethanenen geführt werden.

Das Nämliche, was das Kind mit geradlinichten Gegenständen, die es zum Spielen benutzte, der Form halber gethan hat, kann man es auch mit der Kreide oder mit dem Griffel auf einem andern hiefür geeigneten Körper, durch Striche nachahmen und nachzeichnen lassen. Diese Uebung ist nicht weniger bildend, und obgleich sie zuerst blos als Spiel betrieben und allenfalls auch nur im Sand ausgeführt wird, so kann man ihm hiefür später etwa ein Bleistift, weiche Kreide oder Schreib- und Zeichnungsfedern u. s. w. in die Hand geben. Je vielseitiger die Abwechselung in der wirklichen praktischen Ausübung dieser Idee ist und je öfter die Wiederholung derselben statt findet, desto vollständiger und vollendeter gehet auch die Entwickelung der Geisteskraft des Kinds von statten.

Deswegen ist es nothwendig, daß das Kind dergleichen Uebungen im Thon oder mit dem Messer, mit der Scheere ꝛc. an Gegenständen, an denen dieses leicht ausführbar ist, versuche und bis zu einem gewissen Grad von Fertigkeit fortsetze. Seine Neigung, etwas aufzubauen und das Aufgebaute wieder niederzureißen, muß mit der Neigung, nicht bloß zu denken, sondern zugleich auch zu thun und durch das Thun das Denken weiter zu führen, in Zusammenhang gebracht und zu diesem Endzweck benutzt werden.

Eine ganz vorzügliche Uebung gestattet das Spiel mit dem Kubus (Würfel). Gut ist es, wenn man ihm eine größere Anzahl Kubus, wovon jeder einen Zoll mißt, als Spielgegenstände übergibt. Die Mutter könnte in dieses Spiel sich etwa auf folgende Weise bildend einmischen:

Suche aus deinen Würfeln zwey gleiche oder zwey ungleiche gerade Reihen zu machen. Bey den ungleichen Reihen kann sie angeben, sie sollen zwey, dreymal ꝛc. so lang seyn als die kleinere Reihe. Eben so können unter den gleichen Bestimmungen auch ungleichlaufende Linien, Winkel, Dreyecke, Ecken, Kubus und andere Formen dargestellt werden. Auf diesem Weg führt sie ihr Kind dahin, Formen nachzuahmen; und im Fall es auch welche darlegen wollte, die dem Hause ähnlich wären, so unterstützt sie es auch hierin, wiewohl mit diesen Körpern die Form eines Hauses nur sehr unvollkommen nachgeahmt werden kann.

Auch hier können die Zahlverhältnisse mit eben der Leichtigkeit bildend angeknüpft werden. Ihre Ausführung wird aber in gegenwärtiger Darlegung nicht weiter nothwendig, wenn man den Geist dieser Uebungen aufgefaßt hat. Statt Würfel, kann man dem Kind auch mehrere gleichgroße und gleichgeformte Stücke Kartenpapier in die Hand geben und dasselbe ähnliche Spiele machen lassen. Die Mutter wird aber noch besser thun, wenn sie ihr Kind dahin führt, daß es diese Formen entweder mit einem Messer oder mit einer Scheere selbst zuerst bildet. Der Thon ist hiezu vorzüglich geeignet, und für dieses Alter ist es eine wichtige Uebung, das Kind Formen daraus bilden zu lassen.

Ich kann nicht oft genug wiederholen, wie sehr in der frühesten Bildung des Kinds alles darauf ankommt, daß alle seine Glieder und Sinne in Thätigkeit gesetzt und durch diese Uebung zu ihrer höchsten möglichsten Stärke, Gewandtheit und Dauerhaftigkeit erhoben werden. In Gefolg dessen wird es dringend, eine und dieselbe Uebung öfters nach einander zu wiederholen und die Zeit dieser Wiederholung zu verlängern; doch darf die Geduld, Lust und Freude des Kindes nie so lange auf die Probe gesetzt werden, daß es am Ende dahin kommt, dieses in gewohntem Schulzwang zu thun. Die oben aufgestellten Uebungen können aber auch mit folgenden abwechseln.

So wie das Kind eine volle Kenntniß von gerade, krumm, von Winkeln, Dreyecken, Vierecken ꝛc. hat, so kann dieses auf folgende Weise erweitert werden. Hat das Kind einige geradlinichte Stäbe in den Händen, mit denen es spielt, so läßt die Mutter dasselbe versuchen, ob es ebenfalls mit zwey solchen Stäben einen, zwey, drey, oder vier Winkel machen könne. Kennt das Kind die Art der Winkel, so fährt sie fort und gibt ihm auf: es solle untersuchen, ob es einen, oder zwey, drey oder vier rechte Winkel machen könne; so mit den spitzen und stumpfen Winkeln. An wie viel Orten kann man zwey geradlinichte Gegenstände (etwa viereckigte Liniale) mit einander verbinden. Was so mit zwey Linialen vom Kinde versucht wird, kann auch auf drey und mehrere ausgedehnt werden. So könnte die Mutter das Kind versuchen lassen, ob drey Liniale zuerst an einem Orte, hernach an zwey und endlich an drey Orten zusammengebracht werden können. Ferner wird sie ihr Kind untersuchen lassen, wie viele Winkel mit drey solcher geradlinichter Formen gemacht werden können, wenn sie an einem, hernach an zwey und endlich an drey Orten verbunden sind.

Diese Uebung könnte auch in Rücksicht der Art der Winkel auf die nämliche Weise, wie bey zwey Linien, fortgesetzt werden. Alle Formen erschöpfen zu wollen, ist auf dieser Stufe ganz und gar nicht nothwendig; wenn das Kind nur einige Veränderungen findet, so ist der Zweck, der hier gesucht wird, auch wirklich erreicht. Das nämliche auf vier und mehrere geradlinichte Gegenstände ausgedehnt, wird nicht einmal nöthig; jedoch ist es nothwendig, ja unentbehrlich, daß sie das Kind aufsuchen lasse, wie viele Räume es mit drey, vier rc. solcher geradlinichter Formen schließen könne. Auch diese Uebung kann wichtig werden, wenn man das Kind zur Abwechselung diese Formen mit der Kreide, mit dem Griffel oder mit dem Bleistift auf dem Papier oder auf der Tafel darstellen läßt. Je mühsamer es für das Kind ist, gerade Linien mit Leichtigkeit zu machen, desto weniger muß dieses veranlasset werden, und desto öfter müssen auch die Uebungen, die das Ziehen der Linien veranlaßt, vorgenommen werden. Eben so einleuchtend ist es, daß in diesen Uebungen der Anfang mit dem Gebrauch der Zeichnungs- und Schreibmaterialien gemacht werde, die einerseits nicht so leicht zerbrechlich, anderseits aber auch nicht zu hart und spröde sind; das Ende aber mit den weichen und leicht zerbrechlichen Zeichnungs- und Schreibmaterialien und mit den schwierig zu führenden Instrumenten. Jedes Land bietet in dieser Rücksicht etwas dar, das hiefür mehr oder weniger geschickt ist. So kann man in der Schweiz den Griffel und die Schiefertafel als vorzüglich geeignet in den Anfängen benutzen. Aber eben so geeignet sind große schwarze Holztafeln und weiche, weiße Kreide, um die Darstellung zuerst in großer Form zu versuchen. In kleinem und großem Maaßstabe die nämlichen Formen durch das Zeichnen vorzustellen, ist für die Bildung der richtigen Anschauungs- und Auffassungskraft von großer Wichtigkeit. Nicht weniger wichtig ist folgende Uebung.

Die Mutter stellt mit beweglich geradlinichten Gegenständen oder mit dem Griffel auf der Schiefertafel, oder mit weißer Kreide auf einer schwarzen Tafel 2c. 2c. alles dar, was sie mit zwey geraden Linien machen kann, und läßt das Kind jedesmal aufsuchen, aufzählen und aussprechen, was sie dargestellt hat. Und das Kind wird finden, daß sie mit zwey geraden Linien entweder einen, zwey oder vier Winkel, eine Ecke oder keine, einen Vereinigungspunkt oder keinen, zwey gleichlaufende oder zwey ungleichlaufende Linien 2c. macht. Hernach nimmt sie drey Linien und stellt dem Kind die verschiedenartigsten Verbindungen und Zusammenstellungen, die durch sie möglich sind, vor die Augen. Eine größere Anzahl Linien ist für die Erreichung des nämlichen Endzwecks unentbehrlich, und wird, wenn einige der wesentlichsten und wichtigsten Verbindungen mit einer ziemlich großen Anzahl Linien statt finden, für die freye Bildung des Kinds sehr vortheilhaft. Da es aber in diesem Alter eine sehr große Neigung zum Anschauen, Beobachten und selber zum Spielen, in sofern es irgend ein Interesse an einen Gegenstand zu knüpfen versteht, hat, so können ähnliche Verbindungen von Linien auf Tabellen gebracht und dem Kind auf eine geeignete Weise, zu Zeiten auch nur spielend, vor Augen gelegt werden. Um den Reiz des Kinds, diese Formen öfters anzuschauen, noch zu vermehren, wird man nicht gegen die Natur in diesem Alter handeln, wenn man das, was es jedesmal anschauen soll, mit ansprechenden Farben bezeichnet; z. B. da wo es die Winkel aufzählen soll, müßten sie sich mit irgend einer Farbe angemerkt finden, die Ecken aber mit einer andern Farbe ꝛc.

Je bunter dieses Farbenspiel für den Anfang ist, desto mehr wird die Aufmerksamkeit des Kindes auf das gerichtet werden, was der eigentlichen Bezeichnung des Gegenstandes zum Grunde liegt. So wie aber das Kind an Alter und Auffassungskraft vorschreitet, so werden auch diese Farben entbehrlicher und müssen am Ende auf jeden Fall ganz wegfallen. Zur Vorbeugung einer unrichtigen Anwendung dieses Grundsatzes erlaube ich mir noch folgende weitere Erläuterung. Die Kinderstube für dieses Alter sollte mit vielen, für das Kind bildenden Eindrücken versehen seyn, und man hat ganz Unrecht, die Wände eines solchen Wohnzimmers für diesen Endzweck nicht so bildend zu benutzen, als man könnte. In dem Grad als die Anschauungs- und Auffassungskraft des Kinds sich ausdehnt, in eben dem Grad sollten die Gegenstände, an denen es dieselbe üben muß, seiner Umgebung auf eine geschickte Weise näher gebracht und in dieser Nähe, wenn auch durch die Kunst erhalten werden. Mit dem Steigen und Zunehmen der Bildung des Kinds werden die erstern und frühern Anfangsgegenstände unentbehrlicher und müssen in dem Verhältniß aus dem Kreise der Kinder verschwinden, als sie durch andere ersetzt werden. Es unterliegt keinem Zweifel mehr, daß dieses auf den ganzen Umfang aller Gegenstände und Verhältnisse, die durch die Anschauung, Auffassung und Beobachtung des Kinds einwirkend sind, anwendbar ist, und in mehrern Richtungen sogar nothwendig wird.

Ich habe so eben gesagt, daß sich die Sprachlehre unmittelbar an die Zahl- und Formlehre anknüpfe; ich berühre diese Ansicht nur in so fern, als diese Unterrichtsfächer nicht von einander getrennt werden dürfen und nicht von einander getrennt werden können. Das Kind darf nicht nur dahin geführt werden, daß es eine richtige und genaue Anschauung der verschiedenen Formen, die eben aufgestellt wurden, erlange, sondern daß es auch gleichzeitig geübt werde, sich hierüber geläufig und richtig auszudrücken und jedesmal richtig, genau und bestimmt in Worte zu fassen, was es thut, anschaut, beobachtet und begreift. Soll dieses erreicht werden, so ist eine öftere und vielseitige Wiederholung etwas, das gar nicht aus dem Auge gelassen werden darf; es wird aber der Mutter um so leichter werden, als die Sprache auf dieser Stufe und in dieser Ausdehnung als das eigentliche Verbindungs- und Verständigungsmittel zwischen dem Kind und ihr anzusehen ist, und in soweit gleichsam nothwendig verbunden erscheinen muß, wenn sie bildend auf ihr Kind einwirken und sich ihm einerseits auf jeder Stufe verständlich machen, anderseits aber das Kind auch von ihm ganz verstanden werden soll.

Das Wort, das dießfalls öfters sehr verschwenderisch von der Mutter bey ihrem Kinde angewandt wird, muß nur nach dem Bedürfniß, nach der Ordnung und in der Ausdehnung, in der seine Bildung wirklich vorschreitet, gebraucht werden. Deswegen muß das Kind nach und nach angehalten werden, die anfänglich nur in abgebrochneren Sätzen ausgesprochenen Formverhältnisse in zusammenhängenden Phrasen auszusprechen. Die Sprache kann auch als Gedächtnißübung mit den Formverhältnissen verbunden, allgemein sehr wichtig werden, und darf in diesem frühern Alter auch in Rücksicht auf die Zahl- und Formlehre ganz und gar nicht aus den Augen gelassen werden. Eine hier einschlagende Uebung wäre folgende: Versuche noch ein mal, dieses ohne Fehlen nach einander zu sagen. Kann es das Kind, so fordert die Mutter es auf, sich dieses heute sowohl zu merken, daß es dasselbe morgen ebenfalls noch ohne Fehler wiederholen kann. Wird dieses auf zwey und mehrere Tage ausgedehnt, so erhält die Gedächtnißkraft des Kinds eine Stärke, die nicht leicht auf einem andern Wege erzielt werden kann, in dem hier der Hintergrund auf Anschauung und selbst erzeugten Produkten der Anschauung ruht. Auch das Vorstellungsvermögen, das als Geistes- und Gedächtnißkraft bildend in's Auge gefaßt werden muß, und für die spätere Bildungsepoche von der höchsten Wichtigkeit ist, schließt sich nothwendig, ja unmittelbar an die obigen Uebungen an; sie steht mit der Gedächtnißkraft in sehr naher Berührung und muß auf folgende Weise hier angeschlossen werden. Nachdem die Mutter das Kind etwa mit zwey geraden Linien verschiedene Veränderungen in Hinsicht der Form hat machen lassen, kann sie zu ihm sagen: Sieh diese Form recht an,

als

alsdann wollen wir sie auslöschen und probiren, ob du sie gleich aus dem Kopf darzustellen im Stande seyest. Sie sagt ihm ferner: sieh diese Formen recht an, und wenn du sie morgen oder übermorgen noch einmal aus dem Kopf sogleich darstellen kannst, so erhälst du die zwey oder drey Liniäle, mit denen du spielst, oder den Griffel und die Tafel, auf der du die Formen dargestellt hast, zum Eigenthum. Es würde die Vorstellungskräfte des Kindes zu sehr anstrengen, wenn diese Uebung im Anfange auf zu viele Tage hinausgehoben würde; aber nach Maßgabe des Alters und der Zunahme der Kräfte des Kindes kann sie auch der Zeit halber ausgedehnt werden. Den Schluß der geradlinichten Formen mögen folgende Uebungen machen: Sieh, wie viele rechte Winkel du mit zwey geraden Linien auf deiner Schiefertafel machen kannst? Das Kind wird finden, daß es einen, zwey oder vier rechte Winkel machen kann. Bey der Ausdehnung der nämlichen Frage auf drey gerade Linien wird es drey, vier, fünf, sechs oder acht rechte Winkel finden. Erschöpft es auch nicht alle Fälle, die möglich sind, so hat dieses nichts zu bedeuten, und es ist nicht nothwendig, daß das Kind zur Anschauung aller dieser Fälle angehalten werde. Statt dessen kann sie ihm aufgeben, mit zwey oder drey Linien nur stumpfe oder auch spitze Winkel zu formiren. Hier wird ihm die Veränderung der Formen noch schwerer fallen, und es ist eben so unwesentlich, dieselben erschöpfen zu wollen. Hingegen kann die Mutter die Uebung umkehren und eine Anzahl rechte, oder stumpfe, oder spitze Winkel, oder auch geschlossene Figuren machen und das Kind die

Zahl der sie bildenden Linien aufsuchen lassen. So z. B. zeichnet sie 1 oder 2 oder 3 Dreyecke, ein zwey oder drey Quadrate, und läßt das Kind die Linien aufzählen, aus denen diese Figuren jedesmal gebildet werden. Aber auch hier darf keineswegs in verwickelte Verbindungen vorgeschritten werden. Ich ende mit der Darlegung der Uebungen, die mit geradlinichten Gegenständen oder mit deren Darstellung durch gerade Linien auf der Tafel statt gefunden, und gehe zu denjenigen über, die mit krummlinichtbegränzten Gegenständen oder mit deren Darstellung durch krumme Linien statt finden müssen.

Der Anfang dieser Uebungen wird mit 3 oder 4 Reifen gemacht, indem die Mutter dem Kinde sagt: Kannst du zwey Reife, die wir als 2 krumme Linien behandeln wollen, so legen, daß sie gleich- und ungleichlaufend sind? Hernach versuche sie so zu legen, daß sie sich vereinigen, und siehe an wie vielen Orten dieses möglich sey. Wie viele Winkel dadurch entstehen? Was diese Winkel für eine Form haben? Wie viel von jeder Art jedesmal gebildet werden können? Sollte es aber durch die frühere Kenntniß der Formen, zu denen es geführt wurde, die Art der krummlinichten Winkel noch nicht kennen, so müßte dieses hier noch nachgeholt werden, und zwar auf die nämliche Weise, wie man das Kind früher zur Kenntniß der geraden und krummen Linien führte. So kann man das Kind nach dem bey den geraden Linien aufgestellten Typus mit den zwey Reifen geschlossene Figuren machen lassen. Statt der Reife kann man sich, wie in den vorhergegangenen Uebungen, des Zeichnens der Linien auf der Schiefertafel bedienen. Die Ausführung dieser Uebungen liegt ganz und nothwendig in derjenigen der Uebungen der geraden Linien; ihre Ausdehnung muß eben so weit geführt werden und alle in denselben gemachten Bemerkungen und aufgestellten Grundsätze finden auch hier ihre volle Anwendung.

Um aber der ungeübten und ängstlichen Mutter einen auch hier genugthuenden Leitfaden in die Hand zu geben, glaube ich folgendes näher ausführen zu müssen. Macht das Kind mit zwey krummen Linien ein Zweyeck, so kann es ein hohles oder erhabenes oder gemischtes Zweyeck seyn. Man kann das Kind untersuchen lassen, was für eine Form die zwey Zweyecke haben, die mit krummen Linien gebildet werden. Deßgleichen mit drey Zweyecken. Bildet es aber mit drey oder mit vier krummen Linien ein Dreyeck oder ein Viereck, so läßt sie die Form derselben untersuchen. Es versteht sich, daß die Anzahl der geschlossenen Figuren nach dem nämlichen Gesichtspunkt zu behandeln ist. Die Darstellung auf der Schiefertafel ist darum von besonderer Wichtigkeit, weil dadurch das Kind das Auge und die Hand im Zeichnen und Darstellen der krummen Linien sehr vielseitig übt. Ich komme endlich zur Verbindung der geraden und krummen Linien mit einander. Es finden auch bey dieser Verbindung die gleichen Uebungen, aber nicht in der Ausdehnung statt, die ich bey der Behandlung der geraden Linie aufgestellt habe. Nichts desto weniger können und müssen aber die daselbst aufgestellten Reihenfolgen und Abwechselungen auch hier zur Richtschnur dienen.

Sollte die Mutter mit den Benennungen der hiedurch gebildeten Winkel und Figuren noch nicht hinlänglich bekannt seyn, so mag folgende Arbeitung und Wegweisung am rechten Orte stehen.

Eine gerade Linie kann mit einer krummen nie gleichlaufend seyn; den Winkel, der durch eine gerade und krumme Linie gebildet wird, nennt man einen gemischtlinichten Winkel. Ist dieser gemischtlinichte Winkel durch die hohle Seite der krummen Linie gebildet, so nennt man ihn einen gemischtlinichten hohlen Winkel, im andern Fall aber wird er gemischtlinicht erhabener Winkel genannt. Ist die geschlossene Figur durch eine gerade und krumme Linie gebildet, so nennt man sie ein gemischtlinichtes Zweyeck. So mit den Dreyecken und Vierecken ꝛc. Auch muß es mit einigen der wesentlichsten Arten von Zwey-, Drey-, Vierecken u. s. w. vertraut und bekannt werden; doch darf man weder ins Einzelne gehen, noch das Kind dahin führen, Formverhältnisse, die irgend eine Schwierigkeit darbieten könnten, von einander unterscheiden zu lernen. Die Art und Weise, wie das Kind zur Kenntniß und Auffassung dieser hier nur im Kurzen berührten Formen zu führen sey, ist in dem, was ich über die gerade Linie umständlich zeigte und angab, hinlänglich erörtert; ich verweise daher die Mutter, um in der praktischen Ausführung mehr Stoff zu besitzen, nur dahin. Ganz gleiche Verbindungen können auch mit den ebenen und geradlinichtbegränzten Flächen vorgenommen werden, worüber ich zur Verdeutlichung noch einige Beyspiele anführen will. Die Mutter läßt das Kind etwa zwey, drey oder vier gleiche Dreyecke oder Quadrate aus Papier, Kartenpapier ꝛc. schneiden und diese wieder auf die nämliche Weise verbinden, wie es bey geraden Linien geschehen ist. Zwey Flächen, die in einer Linie mit einander verbunden sind, bilden einen Winkel (Flächeninhalt genannt), und zwar wieder einen rechten oder einen spitzen oder einen stumpfen Winkel; das Kind, das die Flächenwinkel kennt, fährt, wie bey der geraden Linie fort, zu untersuchen, wie viele Winkel jedesmal gebildet werden können, und später, welche Form dieselben hinwieder jedesmal haben. Der Typus, der bey den geraden Linien aufgestellt wurde, kann hier in seinem ganzen Umfange befolgt werden. Werden Flächen in drey Linien und in einem Punkt mit einander verbunden; so nennt man den Winkel, der dadurch gebildet wird, einen körperlichen Winkel; doch aus früherer Anschauung soll sich das Kind das Wesen dieser Winkel auch schon eigen gemacht haben. Kennt das Kind die körperlichen Winkel unter allen Verbindungen, so läßt die Mutter dasselbe wieder untersuchen, wie viele solcher Winkel es mit einer gewissen Anzahl Flächen zu machen im Stande sey; und setzt es wieder bis zu der Bestimmung der Arten der Winkel fort. Mit vier gleichseitigen Dreyecken oder mit sechs Quadraten kann das Kind einen regelmäßigen Raum vollkommen schließen. Der erst geschlossene Raum gibt eine Pyramide, der zweyte einen Würfel. Ferner läßt die Mutter das Kind mit andern Flächen die verschiedensten Körper verfertigen und setzt dieses so weit fort, als sie im Stande ist, die Thätigkeit des Kinds mit Heiterkeit zu erhalten und die Kraft desselben weder zu ermüden noch zu überschreiten. Zur Abwechselung ist es nicht unwesentlich, daß die Mutter der Anschauung und Beobachtung des Kindes die aus Holz oder Pappendeckel verfertigten, mathematischen Körper noch einmal unter folgenden Gesichtspunkten vorlege. Sie gibt ihm den Kubus in die Hand und läßt es aufzählen, wie viel Flächen es an demselben habe, welche Form diese Flächen jedesmal haben, wie viel gerade Linien es an ihm finde, in wie viel Punkten sich dieselben vereinigen, wie viel in jedem Punkte sich jedesmal vereinigen, wie viel gleichlaufend seyen rc. So bald das Kind die Flächenwinkel kennt, so wird diese Frage auch auf die Art der Winkel ausgedehnt und die Mutter fragt es: Wie ist ein Flächen-, wie ein körperlicher Winkel gebildet? Wie nennt man das Ganze eines Körpers, der so und so gebildet ist? Es lernt im Anfange den Tisch von der Bank nur durch Anschauung und Auffassung dieser Gegenstände unterscheiden und jedesmal mit dem richtigen Namen benennen, ohne daß irgend eine Erläuterung oder Erklärung ihres Unterschieds deßhalb statt findet, und dieses muß überall erhalten werden, wo der Gang der Natur befolgt wird. Wie das erklärende Wort durch Anschauung und Beobachtung in diesem Alter immer ersetzt werden kann, wird man wohl thun, hiezu seine Zuflucht zu nehmen und dieses erste wahrhaft bildende Hülfsmittel in Anwendung zu bringen suchen. Auch folgende Uebung ist sehr wesentlich. Man gibt dem Kinde einen Gegenstand seiner Umgebung, als etwa einen Tisch, einen Kasten, das Zimmer selbst, in dem es wohnt, und sucht seine Aufmerksamkeit durch folgende Frage zu richten: Wie viele

Flächen hat das Zimmer, in dem du wohnst? Wie viele Linien haben diese Flächen? Was für eine Form hat jede derselben? Wie sind sie mit einander verbunden? Wie viele Winkel findest du in denselben? Wie viele Flächenwinkel und wie viele körperliche Winkel? Was für Arten von Winkel? Sind die Flächen, die Linien, die Winkel gleich groß? Es ist nicht nothwendig, daß das Kind in diesem Alter zu so umständlichen Beschreibungen von krummlinichten und gebogenen Flächen und Körpern schreite. Führt man es aber zu einigen Hauptveränderungen und zu den wesentlich zu unterscheidenden Merkmalen der krummen begränzten Körper, so ist dieses auch alles, was man auf dieser Stufe mit Recht von ihm fordern und erwarten darf. Demnach wird man wohl thun, das Kind vorzüglich mit der Form einiger Pflanzen seiner nächsten Umgebungen, nach dem eben aufgestellten Typus, bekannt zu machen. Nachdem es die wesentlichsten Formen als das Rund, Oval, den Halb= und Viertelsbogen, erhabene, gekrümmte, hohle, gemischte Winkel, Zwey=, Drey= und Vierecke rc. kennt, wird die Mutter keine Schwierigkeiten mehr treffen, die sie mit ihrem Kinde nicht leicht zu überwinden im Stande wäre. Es ist ganz vorzüglich wichtig, daß das Kind das, was es von den Formenverhältnissen kennt, an alle Gegenstände seiner Umgebungen anzuknüpfen suche. Je mehr und je vollständiger es die Gegenstände seiner näheren Berührung kennt und je vielseitiger und freyer die Mutter dasselbe zu einer allgemeinen Thätigkeit und Aufmerksamkeit zu beleben im Stande ist, desto vollendeter wird die erste Entwickelungs=

epoche auch in Rücksicht der äußeren Umgebung desselben werden. Sollte die Mutter in der gegenwärtigen Darlegung der Form noch mehr Stoff zur Belebung und Bethätigung ihres Kindes wünschen oder bedürfen; so wird sie ihn in dem, was für das schulfähige Alter unmittelbar folgt, hinlänglich finden. Ich ende meine Darlegung der Form als Entfaltungsmittel der Denkkraft des Kindes in seiner ersten Bildungsepoche und gehe zu dem diesfälligen Entfaltungsmittel seiner Kunstkraft hinüber. Die Grundsätze, die ich bereits über die Form und Zahl als Entwickelung der Denkkraft aufstellte, finden auch bey der Entfaltung der Kunstkraft des Kindes ihre volle Anwendung. Um aber nicht weitläufig zu werden, wiederhole ich das bereits Gesagte nicht noch einmal, und begnüge mich nur noch, Folgendes beyzufügen: Die Entwickelung der Kunstkraft des Kindes soll in der wirklichen Ausführung ebenfalls nicht von der Zahl und Form als Entwickelung der Denkkraft getrennt werden. Ich wiederhole noch einmal: diese Trennung hat in gegenwärtiger Darlegung keinen andern Zweck, als den, daß der Mutter dadurch ein einfacherer Leitfaden an die Hand gegeben werde. Schon daraus wird klar, daß man in einem Moment von der Zahllehre zur Formlehre, als Entwickelung der geistigen Anlagen zu der Bildung der Kunstkraft übergehen könne und jedesmal auch wirklich übergehen müsse, wenn das Kind sich für das andere belebt fühlt und angesprochen wird. Das Gleiche läßt sich auch über den Zusammenhang und die gleichzeitige Abwechselung dieser Uebungen mit derjenigen der Sprachlehre sagen.

Da die praktische Darlegung der Reihenfolgen der Uebungen mit der Entwickelung der Kunstkraft des Kindes das Wesentliche und Nothwendige, was in dieser Rücksicht gesagt werden muß, enthält, so schreite ich zu diesen Uebungen selbst. Die Bildung der Hand und diejenige des Auges ist das Erste und Wesentlichste, das bey der Entwickelung der Kraft des Kindes zur Kunstfertigkeit zu beachten ist. Der Anfang dieser Uebung ist folgender: Man gibt dem Kinde Körper in die Hand, die in ihrem Gewicht von einander verschieden sind, und läßt es zuerst durch Versuche, die es mit der Hand macht, bestimmen, welcher Körper schwerer oder leichter, gröber oder feiner als der andere sey. Man setzt dieses mit den verschiedenartigsten Gegenständen fort, bis das Kind auch solche, die beynahe die gleiche Schwere haben, gleich groß, gleich fein ꝛc. sind, mit Leichtigkeit von einander zu unterscheiden fähig ist. Es kann bey Körpern, die ihrer Schwere nach von einander verschieden sind, untersuchen, ob der eine Körper zwey, drey, viermal ꝛc. so schwer als der andere, oder ob der eine mehr als zwey, mehr als dreymal ꝛc. so schwer oder weniger als zwey, weniger als dreymal ꝛc. so schwer sey als der andere. Nicht weniger bildend ist es für das Kind, wenn es diese Bestimmungen mit geschlossenen Augen macht. Will man es bey geschlossenen Augen bestimmen lassen, wie viele zählbare Gegenstände es von der einen oder andern Hand habe, so schließen sich die Uebungen der Zahl unmittelbar an diejenigen der Bildung der Hand als Organ für die Kunstfertigkeit an. So wie die Schwere der Körper durch die Hand bestimmt wurde, so kann das Kind auch ihre übrigen Eigenschaften untersuchen. Es kann z. B. bey flüssigen Gegenständen den Grad ihrer Wärme bestimmen, und untersuchen, ob der eine wärmer oder kälter sey als der andere. Das Kind muß im Anfange dahin geführt werden, daß es die großen, wesentlichsten und auffallendsten Unterscheidungsmerkmale der Gegenstände auf diesem Wege angeben kann. Instrumente, die dieses genau bestimmen, gehören nicht hieher, indem es sich nur um die gröbern sinnlichen Unterscheidungen durch Gebrauch und Versuche unsrer Glieder und Organe handelt. Eine sehr genaue, bis zum Raffinement gesteigerte Unterscheidung der Eigenschaften der Gegenstände, ist als die letzte Uebung, in welcher auch Instrumente, die den Sinnen zu Hülfe kommen, ihre Stelle einnehmen dürfen, anzusehn. Andere sehr zweckmäßige Uebungen für den Anfang sind ferner: Man lasse das Kind allerley Gegenstände anfassen, halten und in Bewegung setzen, und zwar von den kleinsten und feinsten, wie von der Nadel, bis zu denjenigen, die seine ganze Kraft in Anspruch nehmen. Diese Gegenstände, Instrumente rc. durch die Hand des Kindes auf die mannigfaltige Weise in Bewegung gesetzt und dieselbe zu irgend einer Beschäftigung der Thätigkeit benutzt, ist von Wichtigkeit und darf nicht unbeachtet bleiben, wenn die erste Epoche des Kindes nach allen Richtungen bildend ins Auge gefaßt werden soll. Ganz vorzügliche Uebungen und Reihenfolgen für den Anfang sind folgende: Wie die gerade und krumme Linie mit Kreide und Griffel auf Schiefertafeln dargestellt, für die Entwickelung der Geisteskräfte des Kindes wesentlich sind; so wird die Linie mit den nämlichen Instrumenten und Materialien dargestellt, für die Entwickelung der Kunstfertigkeiten des Kindes von gleicher Wichtigkeit erfunden werden, und die daselbst aufgestellten Uebungen und Reihenfolgen können als Entwickelung der Hand und des Auges im ganzen Umfange befolgt und benutzt werden. So ist die gerade Linie auch hier wieder das erste, mit dem man anfangen muß; deswegen sollte man ein Kind, das mit einem Stück Kreide sich auf einer Tafel beschäftigt oder mit seinen Fingern Zeichnungen in Sand zu machen versuchte, aufmuntern, mehrere solcher geraden Linien zu verfertigen und dieses so lange fortzusetzen, bis es im Stande wäre, dieselben richtig, mit Kraft und einiger Schnelligkeit auszuführen. Freyheit, Schnelligkeit, Feinheit und Zartheit muß im Anfange aber auch hier nicht zu erzielen gesucht werden; dieses gehört dem Ende und der vollendeten Bildung der Kunstfertigkeit an, die man nicht zu frühe oder unvorbereitet fordern darf. Eben so läßt man das Kind mit den nämlichen Zeichnungsinstrumenten gerade, gleichlaufende, ungleichlaufende, gleichlange, ungleichlange, auch ungleichlange wovon die eine zwey-, drey-, viermal so lang ist als die andere, machen. Versteht sich, daß man sich auch hier mit der Richtigkeit und Kraft des Kindes zu begnügen hat. Man gehet am Faden der Formlehre weiter und läßt das Kind gleiche und ungleiche Winkel machen; die ungleichen zwey-, dreymal so groß ꝛc., auch Winkel in zwey, drey, sechs gleiche Theile theilen. Man läßt es ferner gleichseitige, gleichschenklichte und ungleichseitige Dreyecke, dann mehrere gleichseitige und gleiche Dreyecke oder gleichschenklichte und gleiche Dreyecke verfertigen. So hinwieder Vierecke und zwar vorzüglich gleiche Quadrate oder andere von den regelmäßigen Vier=, Fünf= und Sechsecken, in sofern das Kind diesen Uebungen Geschmack abgewinnen kann; findet man aber, es wechsele diese Uebung gern mit gleichen Uebungen der krummen Linien ab, so kann auch dieses ohne allem Nachtheil und zwar gleichzeitig mit den Uebungen der geraden Linien geschehen. Es müssen aber diese runden Linien, wie früher, aus Runden oder Theilen von Runden (Kreisen, Bogen) bestehen. Diesem gemäß kann es auch bey den Winkeln, bey den Dreyecken, Vierecken u. s. w. die geraden und krummlinichten Figuren gleichzeitig machen. Als zweckmäßige Veränderung wird man wohl thun, das Kind bald klein mit dem Griffel auf der Schiefertafel, bald groß mit weißer Kreide auf der großen Holztafel zeichnen zu lassen. Will man diese Abänderung auf Bleystift und Federn ausdehnen, so thut man sehr wohl und ist ganz für diese Stufe der Bildung des Kindes geeignet. Daß auch diese Uebungen mit den im Anfange aufgestellten geraden und krummlinichten Figuren gehörig abgewechselt werden müssen, soll aus den oft wiederholten Grundsätzen, die man in diesem Alter zu befolgen hat, hinlänglich klar seyn. Ich gehe weiter und zeige einige Verbindungen, die aus krummen, oder aus krummen und geraden Linien gleichzeitig gemacht werden, an; und die als Bildung der Hand und des Auges einzuüben nicht übergangen werden dürfen. Das Kind kann auch hier, wie bey den geraden Linien, hohle, erhabene und gemischte Winkel machen, und zwar wiederum solche, die einander gleich oder ungleich sind, oder worin der eine zwey= oder mehrmal so groß ist als der andere. Die gleiche Uebung läßt sich auf die geschlossenen Figuren ausdehnen. Es bildet Zweyecke jeder Form, und zwar solche, die einander gleich oder ungleich sind; die ungleichen können so gemacht werden, daß das eine um vieles größer oder kleiner wird, als das andere, oder daß beyde einander beynahe gleich sind. Unter gleichen Veränderungen und näheren Bestimmungen wird das Kind zu den krummlinichten Dreyecken, Vierecken ꝛc. geführt. Mit den geraden und krummen Linien vereinigt, wird zuerst auf die nämliche Weise der Winkel, hernach das Zweyeck, dann das Drey=, Viereck ꝛc. verfertigt. Die weitere Ausführung kann aber bey den krummen oder bey den geraden Linien nachgesehen und als Leitfaden benutzt werden. Statt mit der Kreide und dem Griffel auf der Tafel oder Schiefertafel grad= und krummlinichte Formen als Bildung der Hand und des Auges zu machen, kann man die gleichen Formen auch mit andern Instrumenten darstellen lassen z. B. mit der Scheere, mit dem Messer ꝛc. Auch mit diesen Instrumenten muß das Kind geübt werden, bis es im Stand ist, mit ziemlicher Leichtigkeit Drey=, Vier=, Fünfecke ꝛc. mit geraden Linien, hernach mit krummen und endlich mit geraden und krummen Linien auszuschneiden, und zwar im Papier, Kartendeckel, Tuch, weichem Holz, Thon und mehrern andern nicht zu harten Körpern. Eben so kann die Mutter ihr Kind die nämlichen Formen mit andern Instrumenten auf Körpern einkritzen lassen, die nicht zu schwierig zu behandeln sind. Die vielseitige Uebung und Abwechselung der Gegenstände ist auch hier nothwendig. Es ist also nicht hinreichend, daß eine fortwährende Glieder- und Sinnenthätigkeit statt finde, sondern diese muß gleichsam auf alle Gegenstände und Körper seiner Umgebungen angewandt werden. Die Art und Weise, wie sich die Mutter zu benehmen hat, ihr Kind zu beleben, habe ich bereits im Anfang in ein genugsames Licht zu setzen gesucht. Um aber ihr zu noch mehr Freyheit und Vielseitigkeit die Hand zu bieten, mögen folgende leitende Gesichtspunkte doch noch nicht ganz entbehrlich seyn.

Die so eben aufgestellten Uebungen mit den Linien müssen mit den frühern, für den nämlichen Endzweck aufgestellten Reihenfolgen in Freyheit und ohne alle Bedenklichkeit abgewechselt werden.

Das Kind muß also jedesmal nur so lange dabey verweilen, als es dieselbe mit lebendiger Thätigkeit und mit Interesse zu treiben aufgelegt ist. Es muß sich nach und nach angewöhnen, das was es wirklich darzustellen im Stand ist, auch wörtlich auszusprechen. Ueberhaupt muß man auf jeder Stufe und bey allem was es thut und ausführt, angehalten werden, sich klar, bestimmt und wörtlich darüber auszudrücken. In einem solchen Anfang muß die Sprache immer mit der Zahl und Form, diesem wesentlichen Fundamente aller Kunstfertigkeit, behandelt werden. Die Trennung der Uebüngen dieser Darlegung hat wieder einzig zum Zweck, der Mutter einen leichter zu übersehenden Leitfaden an die Hand zu geben. In der wirklichen praktischen Ausführung findet aber für sie keine Trennung statt.

Ich schreite in den Uebungen, die neben dem, was ich gegenwärtig über die Linie aufstellte, noch statt finden, und nicht weniger wesentlich und nothwendig sind, weiter. In diesem Alter ist im Kind der Trieb, Gegenstände seiner Umgebung nachzunahmen, sehr groß und darf nicht vernachlässigt werden; wie z. B. durch Linien Thiere, Pflanzen, Häuser, Möbeln darzustellen. Dieser Trieb führt im Anfang freylich zu Figuren, die mit dem was sie vorstellen sollen, beynahe gar keine Aehnlichkeit haben, aber zur Befriedigung des im Kinde erwachenden Nachahmungstriebs sehr belebend und aufmunternd sind. Man läßt das Kind frey selber sagen, das soll ein Haus, einen Baum, ein Pferd rc. vorstellen, und freut sich seines erwachenden Willens, es vorstellen zu wollen, das das Gefühl, es lernen zu können, voraussetzt. Auch wird die Mutter gar nicht fehlen, wenn sie ihrem Kinde in einigen Linien einen Gegenstand, den es kennt und an dem es Freude hat, nur in einem Umriß selbst vorzeichnet und dasselbe auffordert, dieses wie es könne und möge, nachzuahmen. Je mehr sie ihr Kind mit großer eigner Theilnahme dahin bringt, solche Darstellungen selbst zu versuchen, desto mehr wird das erreicht werden, was mit solchen Uebungen erzielt werden kann und erzielt werden soll. Um die ganze Umgebung des Kindes mit allen Berührungen, in denen es sich befindet, bildend zu behandeln, ist ferner nothwendig, das Kind an allem, was im Haus gemessen, gewogen, gezählt und auf irgend eine

Weise zusammengesetzt, getrennt und verbunden wird, frühe Theil nehmen zu lassen. Diesem zufolge muß es die Größe und Form eines Gegenstandes nicht nur im Allgemeinen bestimmen lernen, sondern auch angehalten werden, denselben in dem Maß aufzufassen, in dem es in unserm gesellschaftlichen und bürgerlichen Zustande unterworfen ist. Um dieses aber in Reihenfolgen zu bringen, die eine Gradation von dem Einfachen zu dem Schweren haben, kann man das Kind mit diesfälligen Maßformen auf eine gleiche Weise vertraut und bekannt machen, wie man es früher mit den geraden und krummen Linien gethan hat. In der Umgebung des Kindes für das Längenmaß muß sich ein Klafter, ein Schuh, ein Zoll, ein Stab, eine Elle, Linie ꝛc. befinden; für das Flächenmaß ein Quadratklafter, ein Quadratschuh, ein Quadratzoll ꝛc.; für das Körpermaß, ein Kubikschuh, Zoll, Linie; für das Fruchtmaß ein Vierling, ein Viertel; für flüssige Körper allenfalls ein Eimer, ein Maß, ein Schoppen; für das Körpermaß als Gewicht betrachtet, das Pfund, das Loth ꝛc.

Um das Kind dahin zu führen, daß es diese angenommenen Maßverhältnisse richtig und mit Freyheit auffasse, sind folgende Uebungen unentbehrlich. Soll es das Pfund in der ganzen Ausdehnung, in der es angewendet wird, auffassen, so legt man ihm ein Stück Eisen, Bley, Brod, Fleisch, Käse, Butter, Holz, Steine, Thon ꝛc. von jedem ein Pfund (oder ein anders Gewicht, das in dem Land, in dem es wohnt, eingeführt ist), neben einander. Durch Anschauung, Aufhebung, Betastung gelangt das Kind dahin, ein Pfund von jeder Materie rich-

tig

tig zu schätzen. An diese Uebung knüpft man die gleichen Körper, die aber mehr oder weniger als ein Pfund wiegen, und läßt das Kind jedesmal, nachdem es diese Gegenstände angesehen und angetastet, schätzen und rathen, ob es wirklich mehr oder weniger als ein Pfund sey. In diesem mehr oder weniger schreitet man weiter und läßt das Kind endlich bestimmen, ob es zwey Pfund oder mehr oder weniger als zwey Pfund seyen. Das nämliche kann und wird mit den andern eben angegebenen Maßen statt finden, wenn eine vollendete Einsicht derselben erzielt werden soll. Will man der richtigen Schätzung des Kinds noch eine größere Ausdehnung geben, so kann man auch flüssige Körper mit dem festen auf die nämliche Weise ihrer Schwere nach vergleichen lassen; z. B. ein Maß Wasser mit dem Pfund, oder ein Maß Oel oder geschmolzenes Fett mit dem Pfund. Um flüssige Körper leichter mit festen vergleichen zu können, wird man wohl thun, wenn man den Kubikschuh oder Zoll als Maßstab benutzt und gleichsam alle Körper, sowohl die festen als die flüssigen, diesem Maß unterwirft. Vermöge eines solchen Maßstabs kann man mit vieler Leichtigkeit bestimmen, wie vielmal z. B. das Bley so schwer sey als das Wasser, als die Milch rc. Nicht unwichtig ist es, das Kind dahin zu führen, richtig zu schätzen und zu urtheilen, wie vielmal ein Pfund Baumwolle, Flachs rc. größer sey als ein Pfund Bley. Es wird aber dieses lange nur annähernd errathen und man darf nicht daran denken, daß es schnell und mit Genauigkeit zu schätzen lernen werde. Die allmählige Näherung zur Richtigkeit ist eine Stufe des Vorschritts zur

Erlernung der höchsten Genauigkeit. Auch bey diesen Uebungen kommt es sehr viel darauf an, das Kind in eine Lage zu versetzen, daß es gleichsam durch die Nothwendigkeit der Lebensverhältnisse, in denen es sich befindet, zur Lösung solcher Aufgaben aufgefordert werde. So könnte es auf einem Spaziergange oder in einer andern freyen Bewegung, in der es sich befindet, aufgefordert werden, von einem Baum zum andern die Entfernung in Klaftern, oder Schuhen, oder auch Schritten zum voraus zu bestimmen und hernach zu messen, ob es diese Entfernung richtig getroffen habe. Daß sich die Zahl auch unmittelbar an diese Uebung anschließe, geht aus der letzten Aufgabe hinlänglich klar hervor und kann als ein neuer Beweis dastehen, daß die verschiedenen Uebungen der Entfaltung und Ausbildung der menschlichen Kräfte im kindlichen Alter durchaus nicht von einander getrennt, sondern im innigsten Zusammenhang unter einander vorschreiten müssen. Nach dieser Ansicht kann man das Kind auch jeden, mit geraden Linien begränzten Gegenstand in seinem Wohnzimmer mit dem Zoll- oder Schuh- oder Klaftermaß, als Ausdehnung in die Länge, als Ausdehnung in die Flächen und endlich als Ausdehnung des Körpers richtig schätzen zu lernen üben. Nachdem das Kind diese Gegenstände vom Auge geschätzt hat, läßt man es dieselben selbst messen und prüfen, ob und wie weit es die Größe und Ausdehnung richtig geschätzt habe.

Die Mutter bleibt aber bey diesen Gegenständen nicht stehen, sie dehnt im Gegentheil die nämlichen Uebungen auf Gegenstände aus, die das Kind nicht so nahe berühren, aber auch nicht außer seinem Kreise und außer seiner Thätigkeit liegen, wie z. B. sein Wohnzimmer. Unter diese Gegenstände gehören allenfalls der Garten, der Baumgarten, das Haus, die Wiese, der Acker rc. Je größer der Gegenstand ist, desto größer ist auch der Maßstab, welcher zur Messung und nähern Bestimmung desselben benutzt werden muß. Aus diesen wenigen Uebungen gehet klar hervor, daß man auf diesem Wege das Kind leicht dahin führen kann, nicht nur Körper richtig anzuschauen und aufzufassen, sondern dieselben eben so richtig mit einander zu vergleichen, und überdieß jeden Körper noch unter das Maß zu bringen, welches in den gesellschaftlichen Verhältnissen, in denen das Kind lebt, in der Uebung ist. Diese letzten Uebungen dürfen aber in diesem Alter nicht zu weit ausgedehnt werden. Sollte das Kind Mühe haben, zu bestimmen, wie viele Quadratklafter der Stubenboden seines Wohnzimmers habe; so muß dieses nicht auf noch größere Gegenstände ausgedehnt und angewandt werden. So wie es ein Bruchverhältniß geben sollte, so muß das Kind in diesem Alter durchaus noch nicht angehalten werden, dasselbe bestimmen zu wollen, indem seine Ueberlegungskraft in diesem Alter noch nicht die Reifung hat, die nothwendig ist, ohne eine ihm in diesem Alter noch schädliche Anstrengung anzusprechen. Diese Uebungen gehören auch in ihren ersten Anfangspunkten in die Schuljahre hinauf. Ich muß noch einen andern Gesichtspunkt dieses Gegenstandes berühren. So vielseitig die Uebungen, die ich über die Bildung der Hand und des Auges aufgestellt habe, auch sind, so wird man mir vielseitig die Bemerkung machen, ich habe über das was man hier vorzüglich zu finden hoffte, über das Positive des Schreibens und allenfalls auch des Zeichnens, bisher keine Sylbe verloren, und doch gehöre es hieher.

Ich antworte: mit einer gebildeten Hand und mit einem geübten Auge kann das Kind bald schreiben und auch bald zeichnen. Man würde ganz gegen die ursprünglich naturgemäßen Grundsätze handeln, die ich in dieser Darlegung aufstellte, wenn man es frühe und besonders ehe die Hand und das Auge die hiefür nöthige Vorbildung erhalten haben, zum Schreiben und Zeichnen anhalten wollte. Diese Ansicht aber hindert gar nicht, auch für die Schreibkunst folgende Uebung in diesem Alter mit den Kindern vornehmen zu lassen. In dem Moment, in welchem die Mutter das Kind mit geraden Linien beschäftigt, kann sie als Abwechselung es auch mit denjenigen Buchstaben der deutschen Schreibart, die aus geraden Linien gebildet sind, bekannt machen; sie kann es diese Buchstaben, wie andere Formen, nachahmen lassen; und zwar auf großen Holztafeln, mit weißer Kreide, auf kleinen Schiefertafeln, mit dem Griffel und endlich auch mit Bleystift auf dem Papier. Mit der Feder aber sollte man es in diesem Alter noch nicht versuchen lassen, Buchstaben darzustellen, besonders so lange das Kind sich im Anfange der Uebungen mit geraden Linien befindet. Auch hier sieht man wieder auf die Erzielung der Richtigkeit und Kraft. — Freyheit, Schnelligkeit, Leichtigkeit, Feinheit und Zartheit müssen erst in einem spätern Alter gesucht und erzielt werden. Kraft und Richtigkeit darf in diesem Alter der

Schnelligkeit und Zartheit weder untergeordnet, noch aufgeopfert werden. Da die deutsche Schrift nur wenige Buchstaben hat, die blos aus geraden Linien gebildet sind, so kann die diesfällige Anwendung mit den geraden Linien nicht weit ausgedehnt werden. Befindet sich aber das Kind bey den krummen und bey den krummen und geraden Linien, so kann diese Anwendung auf alle Buchstaben statt finden und muß auch im nämlichen Geiste, wie bey den geraden Linien, geschehen. Daß auch hier von den einfachern und leichtern Formen zu den schwerern geschritten werden muß, versteht sich von selbst. Auch ist der hier zu beobachtende Gang, die Stufenfolge und Ordnung zu allgemein bekannt und festgesetzt, daß ich jedes weitere Eintreten in die Schreibübungen für überflüssig halte, und will man die auf diesem Weg gebildeten Kunstfertigkeiten des Kindes auch noch auf den positiven Unterricht des Zeichnens anwenden, so kann es in dem nämlichen Umfange und in der gleichen Ordnung geschehen, wie ich so eben beym Schreibunterricht gezeigt habe; doch muß das Nachahmen und Kopieren von Zeichnungsmodeln, so einfach und passend dieselben auch wären, nicht weit getrieben werden. Wohl wird für das Kind gesorgt werden, wenn man es anhält, Modele aus der Wirklichkeit seiner Umgebung und der Natur nachzuzeichnen; so unvollständig diese ersten Umrisse auch werden, so sind sie bildender und nützlicher als Zeichnungsnachahmungen. In wenigen Linien das Kind einen Tisch, eine Bank, eine Thüre, die Seite eines Hauses, den Umriß einer Pflanze darstellen zu lassen, darf für diesen Endzweck nicht aus den Augen gelassen werden.

Die weitere Ausführung dieser Ansicht darf ich der Mutter anvertrauen, und kehre zu dem zurück, was ihr noch weniger bekannt und einleuchtend seyn mag.

Das thätige Leben und alles was vor den Augen des Kindes erzeugt wird, ist für dasselbe in einem hohen Grad dienlich, und so wie man es im Haus zu allem führte, zum Anschauen aufmunterte, und zur Mittheilnahme an demselben anreizte, so kann man es für den nämlichen Endzweck auch schon in diesem Alter zu den einfachsten Handwerkern führen und in ihren Werkstätten verweilen lassen; z. B. bey einem Schreiner, Dreher, Wagner, Schuhmacher, Weber ꝛc. Es kann dem aufmerksamen Beobachter nicht entgehen, daß das Kind in diesem frühern Alter äußerst geschickt ist, sich das was es in der Werkstätte sieht und nicht über seine Auffassungs- und Ausübungskräfte reicht, in einem kleinen kindlichen Maßstabe eigen zu machen und zu benutzen. Das was es dabey nicht versteht und was es auch nicht anspricht, muß man ihm in diesem Zeitpunkt weder erklären, noch es dazu gelüstig machen. Die bloße Anschauung der Sache, wenn sie auch ohne Folgen ist, schadet ihm nichts; wohl aber könnte ihm das Erklären derselben und der Gelust, es verstehen zu wollen, in diesem Alter sehr nachtheilig werden. Um endlich jedem Mißgriff vorzubeugen, der bey der wirklichen Ausführung und Einübung der hier aufgestellten Grundsätze und Bildungsmittel noch statt finden könnte, füge ich dem Gesagten, als Leitfaden für die Mutter, noch bey.

In dem Grad als das Kind älter wird, werden auch die Uebungen, trotz aller Freyheit und Spielform, die sie bis ans Ende dieser Epoche beständig haben und haben müssen, in ihrer Ausübung ihrer Zeit halber einzeln immer mehr verlängert, und das Kind wird allmählig durch das Interesse des Erfolgs selber gereizt, anhaltend und mit einiger Anstrengung an den diesfälligen Beschäftigungen Theil zu nehmen. Die Schulzeit, in die es mit dem Ende dieser Epoche eintritt, setzt eine merkliche Verbindung in der Anhaltung, Ausharrung und Anstrengung dieser Thätigkeit voraus; und das Kind ist für die Schuljahre übel vorbereitet, wenn ihm diese Angewöhnung nicht zum voraus im häuslichen Leben eingeübt und geläufig gemacht worden ist. Dieses ist aber bey einer sorgfältigen Benutzung der Reize, Anlässe und Mittel, die das häusliche Leben zu tausenderley Uebungen der Sinne-, Glieder-, Organe-, und selber der Geistes- und Herzens-Thätigkeit täglich gibt, gar leicht zu erzielen.

Das Ausharren bey diesen Beschäftigungen wird dem Kind, wenn es naturgemäß darin geführt wird, durch die Reize, die dieselben im häuslichen Leben darbieten, von selbst ein Bedürfniß. Es nimmt durch sich selbst und belebt durch die innere Triebe, die in den Kräften liegen, welche diese Entfaltung selbst ansprechen, gerne immer anhaltenden Theil daran, und je mehr jede dieser Uebungen diese innere Triebe anspricht, und sie belebt, desto leichter und sicherer wird das Resultat, daß es sich gerne und freywillig darin anstrengt, erzielt, ohne daß es im geringsten durch irgend eine Art von Reiz und Mittel, die nach dem Schulzwang und nach der Schulordnung riechen, dazu gehalten wird. Dieses darf indeß gar nicht früher als gegen das Ende dieser Epoche der Fall seyn. Aber die Natur macht den Weg der Freyheit dieser Epoche mit den Bedürfnissen des Schulzwangs der Anstrengung, die in der künftigen Epoche eintreten, gleichsam von sich selbst zusammen fallen. Wesentlich ist ferner: Je geneigter ein Kind ist, sich mit den Gegenständen seiner Umgebungen nur flüchtig und oberflächlich zu beschäftigen und die richtige Erkenntniß derselben nicht in sich selber reif zu machen; desto mehr muß man diesem, dem Kind in der Zukunft in einem hohen Grad nachtheiligen Fehler durch die Kunst seiner Führung und durch alles was die elementarische Grundsätze und Mittel hiefür an die Hand geben, schon in dieser Epoche entgegen zu wirken suchen. Das Sprichwort: „Frühreif ist krankreif und zugleich unreif, und führt zum Frühsterben" ist in geistiger Hinsicht noch weit mehr wahr als in physischer. Frühe Blüthen verwelken leicht, und tragen keine Früchte. Matte Kinder hingegen, die aus Trägheit einen Gegenstand oft lange anstaunen und nichts dabey denken, und lange in den Händen halten, ohne die Hände damit zu beschäftigen, müssen durch einige Reizmittel zur Thätigkeit angehalten und aus dem Schlaf ihrer Langsamkeit und Unthätigkeit aufgeweckt werden. Bey armen Kindern hilft die Noth der Umstände und die Anwendung des Sprichworts: wer nicht arbeitet soll auch nicht essen, hierin sehr viel. Auch religiöse Ansichten aus dem Munde der liebenden und thätigen Mutter wirken gegen die Trägheit, die im Phlegma der Natureigenheit des Kindes liegt und schwer auszurotten ist, mit Erfolg. Aber bey diesen ist jeder Versuch von Schulgewalt in diesem Alter, insonderheit bey einem phlegmatischen Kinde, nachtheilig; es wird gegen Schande, Ehre, Belohnung und Strafe sehr bald gleichgültig. Im Allgemeinen muß man hiefür die Reize, die im Gegenstande selbst liegen und bestimmt diejenigen oder solche, die vorzüglich Eindruck auf sie zu machen scheinen, zu beleben suchen, ihnen diese Gegenstände vor die Sinne bringen und mit einer ungesuchten, aber naturgemäßen Belebung auf sie wirken machen. In beyden Fällen, sowohl im lebendigen als im trägen Kinde, muß immer Ruhe den Belebungsmitteln zur Thätigkeit beywohnen. In der Unruhe sind die Sinne des Kindes gleich unfähig von den Gegenständen der Umgebungen, die seine Thätigkeit ansprechen, einen bildenden und segensreichen Erfolg zu bewirken, und sich solid und real auf das vorzubereiten, was sie beym Eintritt in die Schulepoche nothwendig haben.

Die unverdorbene Mutter hat in sich selbst vorzügliche Kräfte zu diesem Zweck. Sie sind der Unschuld ihres Mutterherzens so viel als nothwendig und natürlich; aber in Millionen Müttern hat die Unnatur ihres Lebens durch die Folgen unsrer allgemeinen Verkünstelung diese Kräfte schlafen und hie und da verachten gemacht. Was in ihnen übrig geblieben, ist blos eine dunkle Neigung dazu. Die Fertigkeiten, dieser Neigung ein Genüge zu leisten, sind in ihnen durch die Kunst und das Leben nicht einmal angeregt und belebt; und noch viel weniger ausgebildet.

Das Volk im Allgemeinen besitzt dabey in seiner Umgebung einen höchst beschränkten Kreis von Gegenständen, die in Rücksicht auf Zahl und Form kraftvoll auf seine Bil=

dung einzuwirken geeignet sind. Der Bauer und der Arme überhaupt ist in Gegenständen des Messens und Zählens gedankenlos; und soll er in seinem Stande weiter geführt werden, so muß es bey seinen Kindern durch Uebungen geschehen, die mit den aufgestellten Aehnlichkeit haben. Der geschicktere Handwerker und Künstler, dessen Arbeitsgattung von ihren Anfangspunkten aus große Aufmerksamkeit auf die Gegenstände der Zahl- und Formenverhältnisse und zugleich eine thätige Gewandtheit in der Behandlung derselben voraussetzt, findet die Bildung zum Wesen ihrer Uebung für seine Kinder in seiner eignen Lage und in seinem häuslichen Kreise selber. Daher das Hinführen der Kinder aus allen Ständen in solche Werkstätten von großem Erfolg für die Jugend werden kann.

Sie suchen hier nicht blos das Anschauungsspiel der geistigen Belebung durch Zahl und Form, sondern den Geist der Thätigkeit des lebendigen Thuns, der aus der gebildeten Kraft des Zählens und Messens hervorgeht. Kinder, die zur Aufmerksamkeit gebildet sind, spricht diese Anschauung mit einer Gewalt und Kraft an, die zur wirklichen Theilnahme an dieser Thätigkeit anreizt und dieselben für die Schuljahre ganz besonders vorbereitet.

Im Allgemeinen muß bey dem freyen spielenden Geist, der den bildenden Uebungen dieses Zeitpunktes sonst wesentlich ist, desto nothwendiger bemerkt werden, daß, je mehr das Kind Veränderlichkeiten sucht und gierig nach neuen Gegenständen hascht, desto sorgfältiger man trachten soll, seine Aufmerksamkeit auf jeden Gegenstand, mit dem es sich beschäftigt, festzuhalten und nicht leicht davon wegzulassen, bis er merkliche Eindrücke in ihm zurückläßt.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wiederhole ich die Bemerkung über den Geist der Freyheit, Gemüthlichkeit und kindlichen Belebung, der in dieser Epoche in allem dem, worin sich die Kunst in die Bildung der Kinder einmischt, statt finden muß, nicht mehr. Als weitere Belehrung, Anleitung und Stoff, den häuslichen Unterricht zu einem Grad der Vollendung und in Einklang mit dem Schulunterricht zu bringen, hat die Mutter noch von den, für den Schulunterricht eigentlich bestimmten Uebungen, Reihenfolgen und Grundsätzen, die unmittelbar folgen, Einsicht zu nehmen. Auch wird es keiner Mutter entgehen, daß die für die Schule bearbeiteten Mittel der Zahl und Form in ihrer ganzen Ausdehnung für den häuslichen Unterricht dienlich und zum Theil schon zum voraus im häuslichen Leben benutzbar sind und segensvolle und weitführende Folgen für ihr Kind haben werden, wenn sie oder irgend ein Glied der Familie sich dieser Thätigkeit fortwidmen wollte.

Und soll die Erziehung und der Unterricht einmal mehr als ein gelernter und gelehrter Kastengeist werden; so ist ihre Einführung in das Heiligthum des häuslichen Kreises und aller seiner bildenden Elemente das erste, das zu erzielen gesucht werden muß.

Die Zahl

als

Typus der Entwickelung der geistigen Anlagen des Kindes in und durch die Schule.

Wir haben bereits in dem, was ich für die früheste Epoche des kindlichen Alters aufstellte, gesehen, wie die Zahl und Form als Typus der Entwickelung seiner geistigen Kräfte und Anlagen, vor seiner Schulfähigkeit durch die Mutter und durch das häusliche Leben benutzt werden kann und benutzt werden muß, wenn seine Führung als ein lückenloses Ganze dargestellt werden soll.

Im sechsten oder siebenten Jahre tritt das Kind ins Alter seiner Schulfähigkeit ein, und der Unterricht, der nunmehr beginnt, stützt sich gänzlich oder ist vielmehr die Fortsetzung desjenigen, den es bisher genossen.

Auf dieses Fundament gebaut kann das Kind beym Eintritt in das Alter seiner Schulfähigkeit richtig zählen. Das naturgemäß eingeübte Zählen ist eine geistige Operation, die dem Auffassen und Unterscheiden der verschiedenen Gegenstände der Umgebungen des Kindes in genaue Uebereinstimmung gebracht werden muß. Wenn es also gerade von krumm, groß von klein, den Punkt vom Körper, das Haus vom Stall, den Garten vom Feld ꝛc. unterscheiden und auffassen lernt, so muß es sich nothwendig auch das Zählen eigen machen. Da aber die Behandlung der Zahl in dieser Epoche öfters Mißgriffen unterworfen ist, die der geistigen Entwickelung des Kindes und mit ihr der naturgemäßen Entfaltung des Zählenlernens sehr hinderlich werden können, und ich nicht überall voraussetzen darf, daß das häusliche Leben dem Kinde das gebe, was gefordert wird; so sehe ich mich genöthigt, einige dieser Mißgriffe, wenigstens vorübergehend, berühren zu müssen. So ist unter andern in diesem Alter das Zählen bis zu einer hohen Zahl fortgesetzt, ein dem Kinde höchst schädlicher Mißgriff. Es versinkt dadurch sehr leicht und so viel als unausweichlich zu einem Mechanismus, der nur durch das Gedächtniß unterstützt wird, und dem alle richtige Erfahrung und Anschauung ganz mangeln. Eben so nachtheilig ist ihm in diesem Alter das Auswendiglernen des sogenannten Einmaleins, indem das durch den Mechanismus unterstützte Gedächtniß den Charakter der wirklichen Anschauung und Auffassung der Zahlverhältnisse annimmt. Soll die Jugend diesem Mißgriffe nicht unterliegen, so müssen ihr die zur deutlichen Erkenntniß zu bringenden Zahlverhältnisse unter einer Anschauungs- und Auffassungsform vorgelegt werden, die diesem Mißbegriffe wirklich vorzubeugen geeignet ist. In seinem sechsten oder siebenten Jahre kann das Kind bis auf zehn oder zwanzig allerdings richtig und auf Anschauung und Erfahrung gegründet, zählen, und so ist es im Stande, dieses auch bis auf hundert fortzusetzen, ohne jedoch eine gründliche Anschauung von den Zahlverhältnissen zu haben, die zwanzig oder dreyßig übersteigen. Deßwegen wird die Zahlenlehre mit kleinen (niedern) Zahlen, die unter erschöpfenden Gesichtspunkten alle ihre Verhältnisse darzustellen geeignet sind, angefangen. Auf dieser Stufe ist dem Schüler die Ausdehnung der Zahl bis auf Zehn für diesen Endzweck hinreichend. Damit will ich aber nicht sagen, daß die Reihenfolgen und Uebungen, die einen hinlänglichen Hintergrund der Anschauung haben, nicht bis auf zwanzig oder dreyßig ausgedehnt und fortgesetzt werden dürfen. Da rücksichtlich des Anschauungstypus, der der Zahlenlehre zum Grunde gelegt werden muß, die Ansichten und Meinungen auch der besten Denker noch sehr getheilt sind, welcher Umstand bisher zu mancherley Mißgriffen Anlaß gab, so ist eine nähere dießfällige Erörterung hier ganz an ihrer Stelle. Die tägliche Erfahrung beweist, daß der Anschauungstypus, der den Uebungen in der Zahllehre zum Grunde gelegt werden kann, einer großen Abwechselung fähig ist, und deßhalb vollends dem Gebiete der Veränderlichkeit angehört.

Die zu diesem Endzweck gebrauchten Anschauungsmittel sind mannigfaltig. Einige benutzen hiefür Tabellen, die auf die verschiedenartigste Weise verfertigt, eben so verschiedenartig gebraucht werden; andere haben künstliche, mechanische Vorrichtungen von zählbaren und beweglichen Gegenständen, die ebenfalls einer großen Abwechselung ihres Gebrauchs fähig sind; wieder andere lassen das Kind seine dießfälligen Anschauungsmittel selbst erzeugen und mit den jeweiligen Zahloperationen gleichen

Schritt halten; andere endlich weisen dem Kind selbst seine Finger hiefür an.

Aus allen diesen Veränderlichkeiten der Anschauungsmittel, die ihm in der Zahlenlehre zum Grunde gelegt werden können, nähern sich diejenigen der Wahrheit am meisten, die einfach sind und die größte Thätigkeit mehrerer Sinne gleichzeitig und auf die sicherste Art in Anspruch nehmen. Wer also Auge, Hand, Ohr und Mund zugleich und auf die thätigste Weise beschäftigt, ist bey der großen Veränderlichkeit dieser Mittel, demjenigen, welches der Unveränderlichkeit angehört, am nächsten gekommen. Unstreitig spricht das Selbstmachen und Selbstdarstellen der Zahlverbindungen und ihrer Auflösung eine Thätigkeit an, welche die meisten Sinne auf die kräftigste und einfachste Weise belebt; es nimmt als das passendste Versinnlichungsmittel dieser Operationen die erste Stelle ein.

Auf vieljährige Erfahrung gegründet, wird dieses letztere, indem ich ihm einen Vorzug eingeräumt, bey zweckmäßiger Benutzung und gehöriger Pflege überall gleich befriedigende Resultate hervorbringen. Damit in Rücksicht auf die genugthuendste Behandlung der Zahl nichts unbestimmt, unsicher oder zweifelhaft bleibe, muß ich über die wirkliche praktische Ausführung in Schulen diesem noch folgendes beyfügen: Der vollendeteste und vorzüglichste Anschauungstypus, der nicht leicht mit etwas Anderm ersetzt werden dürfte, kann bey dem persönlichen Benehmen des Lehrers Modifikationen erleiden, die wesentliche Berücksichtigungen verdienen. Ich befasse mich aber in gegenwärtiger Darlegung mit der bloßen Persönlichkeit des

Lehrers oder Erziehers keineswegs; denn auch ihr Gebiet ist groß, und vorzügliche Individualitäten haben es schon oft so weit gebracht, daß sie bey dem ganz unzweckmäßigen Gange eines Unterrichtsfaches, dem alle wahren Fundamente der Anschauung mangelten, sehr auffallende und sehr befriedigende Resultate hervorbrachten. Aber gerade dieses hat auch schon manchen dahin verführt, diese Persönlichkeiten als die ächte Grundlage, auf welcher der naturgemäße Unterricht wesentlich selber beruhe, sich und anderen in die Augen fallen zu machen. Daher denn auch die Resultate ihrer Nachahmung nicht anders als höchst befriedigend ausfallen konnten. Nicht der Persönlichkeit, wohl aber der Sache selbst angehörend und deßhalb einer wesentlichen Berücksichtigung würdig, ist ferner die Art und Weise, wie die Zahl in gegenwärtiger Abhandlung dargelegt wird; sie ist aber dennoch nichts weniger als der einzige Weg, auf dem sie dem Kinde gegeben werden kann und soll. So weit darf und muß die Einübung der Zahl bey Kindern der Persönlichkeit des Lehrers überlassen werden. Ich schreite in dem, was der Lehrer und Erzieher hier weiter zu berücksichtigen haben, weiter. Es ist wesentlich, daß, nachdem dem Kinde eine Reihenfolge von Zahlverhältnissen unter nachfolgender Norm eingeübt worden, der Lehrer hierüber einzelne Fragen an seine Schüler und jeder Schüler hinwieder einzelne Fragen an seine Mitschüler richte. Damit aber im ersten Fall nicht immer der vorgerückteste Schüler zuerst und so zu sagen, allein antworte und folglich allein wahrhaft arbeite, wird der Lehrer wohlthun, keinen von ihnen sein Resultat laut aussprechen

zu

zu lassen, ehe er sicher ist, daß die größere Anzahl der Schüler die an sie gerichtete Frage ebenfalls wieder gelöst haben. Ein sehr geeignetes Mittel, sich besonders bey einer größeren Anzahl von Schülern dessen zu versichern, ist wohl folgendes: So wie ein Zögling das Resultat gefunden hat, welches er, vermöge der Frage, die an ihn gerichtet worden, finden sollte, so wird ihm nur erlaubt, einen Finger in die Höhe zu halten.

Dadurch findet der Lehrer Gelegenheit, bald diesen, bald jenen Schüler aufzufordern, das Resultat, das er gefunden, auszusprechen. Im Falle dieses unrichtig wäre, so würden seine Mitschüler dadurch gleichsam stillschweigend aufgefordert, es zu verbessern und endlich selbst richtig anzugeben. Auch darf in der Ausführung nicht aus dem Auge gelassen werden, daß man sowohl in den Reihenfolgen als in den einzelnen Fragen das laute Aussprechen einerseits der ganzen Masse, anderseits der einzelnen Schüler gehörig zu benutzen verstehen müsse, ohne jedoch diesem einen Werth und eine Kraft zu unterlegen, die es nicht besitzt. Viele glauben jetzt noch, daß das Wesentliche und Eigenthümliche meiner Unterrichtsmethode darin bestehe, das Kind im Lautsprechen und im Zusammensprechen zu üben. Es ist allerdings wahr, daß Schall und Ton auch als ein dienliches Mittel der Anschauung benutzt werden können; sie nehmen nicht nur in der Zahlenlehre und in allen Fächern, die aus der Entwickelung der geistigen Anlagen aufgestellt werden, eine bedeutende Stelle ein, sondern dieses ist sogar bey allen Unterrichtsfächern, ohne alle Ausnahme, der Fall; folglich ist eine nähere

Erörterung und Bestimmung der Art und Weise, wie dieses bey der Zahllehre anzuwenden sey, hier sehr nothwendig. Bey allem, was sich durch Leichtigkeit für die Jugend auszeichnet, muß gewacht werden, daß keine Art von Mechanismus und Auswendiglernen den Platz der geistigen Entwickelung einnehme. Die verschiedenen Operationen der Zahlenlehre geben zu diesem Fehler leicht Anlaß, wenn man seine Aufmerksamkeit nicht auf Folgendes richtet. Auf keinen Fall läßt man eine größere Anzahl Schüler länger zusammen sprechen, als bis die Uebung, die sie jedesmal vorhaben, ihnen geläufig zu werden anfängt. So wie dieses erreicht ist, wird abgewechselt und zwar unter folgender Norm: man läßt einzelne Kinder darin fortfahren und ruft bald eins der schwächsten, bald eins der gewandtesten und stärksten, bald ein sehr zerstreutes, bald ein sehr aufmerksames Kind hiefür auf. Hat man viele Kinder in einer Klasse, so setzt man die stärkern und die mittlern Schüler zusammen und läßt dieselben, in drey Abtheilungen, abwechselnd mit einander sprechen. Eben so kann man zur Abwechselung etwa einen sehr starken Schüler neben einen sehr schwachen setzen und beyde im Zusammensprechen gleichzeitig üben. Ueberhaupt können in diesem Punkt die vielseitigsten Abwechselungen statt finden, die als dem Unterricht sehr dienlich und ihn befördernd angesehen und behandelt werden. Das vorzüglichste, das auf diesem Wege zu erzielen möglich, wäre aber, wenn man die Kinder anhielte, zusammen zu sprechen, während dem sie durch irgend einen Gegenstand sinnlich darstellen, was sie sich wörtlich verdeutlichen. Als un=

veränderter Typus darf in den ersten Reihenfolgen einer Uebung immer Folgendes nicht unbeachtet bleiben: Jede neue Reihenfolge von Zahlverhältnissen muß vor allem aus vom Schüler durch geschäuliche Gegenstände dargestellt werden, während der Darstellung müssen aber immer die Schüler der oben angegebenen Abwechselung wörtlich laut aussprechen, was sie thun.

Damit der Mechanismus und die Gedächtnißfertigkeiten keine Wurzel fassen, ist weiter nothwendig, daß sobald die Anschauung der Zahlverhältnisse, die auf sinnlichen Gegenständen beruhen, hinlänglich begründet ist, und diese Uebungen nur als reine Kopfrechnungsaufgaben dastehen, so muß nach und nach zu höheren Zahlen zu schreiten angefangen werden. Als bloßes Erinnerungsmittel können dann die Ziffern auf dieser Stufe allerdings benutzt werden. Sie müssen aber nur die sinnliche Darstellung der Zahlverhältnisse ersetzen und zu nichts weiter gebraucht und weiter dienend angesehen werden. Wie dieses einzutreten hat, werde ich bey der Darlegung der Uebungen dann genau und umständlich zeigen und bemerke hier nur, daß der eigentliche Anfangspunkt erst bey den Brüchen statt finden darf. Das Unnöthige der Erlernung des Einmaleins wird dadurch bey einem also geführten Kind außer allen Zweifel gesetzt. Der Schüler besitzt das Wesen des Einmaleins als Resultat des vollendeten realen Bewußtseyns aller Zahlverhältnisse und bedarf deßhalb auch keiner besondern Einübungsmittel mehr. Es muß und kann nicht mehr zur Gedächtnißsache gemacht werden, weil es die Sache der Erkenntniß selbst geworden ist. So wichtig die Gedächtnißkraft auch an und für sich ist; so darf sie weder auf dieser noch auf einer künftigen Stufe benutzt werden, wenn man die Zahl als Entwickelung der geistigen Kräfte und Anlagen des Kindes festhalten will. So wie man also wahrnimmt, daß der Schüler nur mit Hülfe seines Gedächtnisses anfängt, in den Zahlverhältnissen zu arbeiten, so darf man mit Recht auf irgend eine fehlerhafte frühere Behandlung schließen. Will man aber diesen Fehler wieder gut machen, so muß man zu frühern Uebungen zurückkehren, oder wenn dieses nicht wohl möglich oder nicht mehr thunlich ist, so müssen die kommenden und künftigen Uebungen so behandelt werden, daß es dem Schüler unmöglich wird, dieselben nur durch die Gedächtnißkraft zu lösen. Auch ist dieses um so leichter, als die Zahl in ihrer vielseitigen Verbindung (Combination) die kräftigsten und geschicktesten Mittel gerade gegen einen solchen Mißgriff darbietet. In wie weit die Grundsätze der Zahlenlehre, die im häuslichen Kreise durch die Mutter ausgeübt, auch in der Schule ihre Anwendung finden, wird durch die wirkliche Ausführung dessen, was ich für die Zahl in der Schule aufstelle, sehr klar werden. Das was dieser ersten Stufe der Bildung eigenthümlich zukommt, und als solches auch hinlänglich bezeichnet wurde, muß wie natürlich in der Schulbildung nicht wiederholt werden. Die Einheit wird als Entwicklung der geistigen Anlagen des Kindes das erste seyn, mit dem angefangen werden muß. Auf diese Grundsätze gestützt und die allfälligen Irrwege, auf die der Lehrer mit seinen Schülern durch die Befolgung dieses Ganges gerathen könnte, ausweichend, wird der Anfang der Zahlenlehre auf folgende Weise gemacht werden können. Der Lehrer sagt zu seinen Schülern: Stellt auf euern Schiefertafeln durch Zeichen (Punkte, Striche, gerade oder krumme Linien ꝛc.) die Zahlen von 1 bis 10 dar. *) Der gerade Strich ist dasjenige Zeichen, das der Schüler am schnellsten verfertigt und ihm das Zahlverhältniß zugleich anschaulich macht. Man geht weiter, und sagt zu den Schülern: Zählt zu dieser Zahl eins hinzu, indem ihr einen Strich hinzufügt und seht, wieviel dieses jedesmal gebe. So läßt man den Schüler 1, 2, 3, 4 ꝛc. bis 10 zu 10 hinzusetzen, oder hinzuzählen.

Aus den oben dargelegten Grundsätzen ergiebt sich ferner, daß, indem der Schüler dieses wirklich darstellt, er angehalten werden muß, mündlich gleichzeitig auch auszusprechen, was er jedesmal thut. Die Norm, unter der dieses geschieht, ist folgende: 1 zu 1 gesetzt giebt 2; 1 zu 2 gesetzt giebt 3; 1 zu 3 gesetzt giebt 4 ꝛc. So mit zwey: 2 zu 1 gesetzt giebt 3; 2 zu 2 gesetzt giebt 4; 2 zu 3 gesetzt giebt 5. — So mit dem Hinzusetzen von 3 ꝛc.

Dieses mit Anschauungsgegenständen wirklich darstellen, es zugleich mündlich aussprechen und gleichzeitig rechnen lassen, ist in diesem Alter eine Hauptsache, die schnell dahin führt, die Sinnenthätigkeit des Kindes auf eine

---

*) Die Schiefertafel und der Griffel sind das für diese Uebungen geeigneteste Schulmaterial; doch kann es in Gegenden, wo es schwer zu finden ist und theuer zu stehen kommt, durch andere ersetzt werden.

äußerst vortheilhafte Weise zur Erhöhung seiner geistigen Bildung in Anspruch zu nehmen. Bemächtigt man sich aber dieser Sinnenthätigkeit in diesem Alter auf keine Weise, so ist der blos instinktartige Trieb, die Resultate des Zählens schnell zu finden, der soliden Begründung des Zahlenlernens sehr nachtheilig und kann durch nichts anders ersetzt oder eingeholt werden. Die Sinne wollen beschäftigt seyn, und werden sie von nichts angesprochen, das ihre Aufmerksamkeit reizt, so werden sie von Dingen belebt, die sie nur zerstreuen. Nicht selten ist der Lehrer im Fall diesen Hang bey seinem Schüler beynahe nicht besiegen zu können. Je mehr er hier zu kämpfen hat, desto nothwendiger wird die Benutzung der oben aufgestellten Norm seyn, unter der man den Schüler die Zahl darstellen läßt.

So kann man ihn zu jeder Zahl von 1 bis 10, auch 2 Zahlen und zwar gleiche oder ungleiche hinzusetzen lassen; wie z. B. 1 und 2, oder 2 und 3, oder aber 2 und 2, oder 2 und 3 2c. Die Ausführung findet auf folgende Weise statt:

2 und 3 zu 1 gesetzt giebt 6.
— — — zu 2 — — 7.
— — — zu 3 — — 8.
— — — zu 4 — — 9.

Drey oder sogar 4 Zahlen zu der Zahlenreihe von 1 bis 10 setzen zu wollen, ist bey einer gehörigen Behandlung im dießfälligen Zusammenzählen von einer und zwey Zahlen nicht mehr nothwendig. Will man aber auch diesem und einer erweiterten Abwechselung dennoch einen

Werth geben, so müssen ihre Uebungen dem Schüler nur noch in einzelnen Fragen vorgelegt werden. Z. B. wenn man zu 1 oder 2 oder 3 ꝛc. die Zahl 1, 2 und 3 hinzusetzt, wie viel wird es geben? Zu 10 die Zahl 2, 4, 6 und 1 gesetzt giebt, wie viel? Ueberhaupt müssen nach jeder Reihenfolge, die durch sinnliche Gegenstände dargestellt und unter der oben aufgestellten Form wirklich ausgeführt worden ist, jedesmal noch einzelne Fragen gemacht werden. Wie und durch wen diese Fragen zu machen seyen, ist weiter oben hinlänglich gesagt worden. Diesem füge ich hier aber als praktische Erinnerung und Erweiterung noch bey:

Würde man den Schüler immer in geordneter Reihenfolge ohne Unterbrechung sich fortüben lassen, so wäre man nicht sicher, daß sich eine Art von Mechanismus oder Gedächtnißfertigkeit, die ihm sehr nachtheilig werden könnten, einschleichen würde. Die einzelnen Fragen sind also bestimmt, um dadurch eine erhöhte geistige Thätigkeit zu erzeugen und diesen Gefahren auf einem naturgemäßen Wege vorzubeugen. Wenn aber diese Darstellungsweise eine höhere geistige Thätigkeit anspricht, warum soll sie dann mit einer Norm abwechseln, die diese Vorzüge nicht besitzt? Dieser Einwendung mag als Antwort folgendes dienen. Ehe man Früchte sammeln will, muß man die Erde vorbereiten, säen und lange pflegen. Freylich kann keines ohne das andere vollkommen bestehen, und vorzügliche Früchte liefern. Auch das sogenannte Socratisiren muß jedesmal, wo es immer benutzt wird, als eine Ernte des Gelernten und Eingeübten angesehen und behandelt werden. Ehe etwas aus dem Menschen gezogen werden darf, muß das, was in ihm liegt, entwickelt werden und zur Reife gelangen. Statt den Schüler eine Reihenfolge von Zahlen, die mit 1 anfangen und mit 10 enden, auf seiner Schiefertafel darstellen zu lassen, kann er auch eine Reihenfolge von 1 bis 10 von geraden und ungeraden Zahlen vorstellen. Für die geraden Zahlen wird er 2, 4, 6, 8 und 10; für die ungeraden aber 1*), 3, 5, 7, 9 und 11 finden. Nachdem es diese Reihenfolgen hinlänglich kennt, wird man die Schüler zu jeder Zahl derselben wieder eine beliebige andere Zahl, als 1, 2, 3, oder 4 &c. hinzusetzen lassen. Ferner können zu eben diesen Reihenfolgen die Zahlen 2, 3 und die mehreren derselben, die einander gleich und ungleich sind, wie oben und zwar unter den nämlichen Gesichtspunkten und Berücksichtigungen hinzugesetzt werden. Die Norm, unter welcher der Schüler diese Ansicht ausführt und anspricht, ist bey der Hinzusetzung des eins folgende:

1 zur ersten geraden Zahl gesetzt giebt 3
1 — 2ten — — — — 5
1 — 3ten — — — — 7 &c.

Das Nämliche findet mit den ungeraden Zahlen statt. Wird die Zahl 2 doppelt zu der Reihenfolge der ungeraden Zahlen gesetzt, so geschieht dieses auf folgende Weise:

2 und 2 zur 1sten ungeraden Zahl gesetzt giebt 5
2 — 2 — 2ten — — — — 7 u. s. w.

---

*) Der Zahl eins wird die Eigenschaft weder von gerade noch ungerade gegeben. Im täglichen Leben aber wird sie dennoch gewöhnlich als ungerade angesehen und behandelt.

Selbst die ungeraden Zahlen müssen unter nämlichen Abwechselungen zu den geraden gesetzt und vom Schüler nach folgender Norm ausgeführt werden:

Die 1ste ungerade Zahl zur 1sten geraden gesetzt giebt 3
die 2te — — — 1sten — — — 5
die 3te — — — 1sten — — — 7 ꝛc.

Die in dieser Rücksicht zu machenden Fragen ergeben sich einerseits aus den Reihenfolgen selbst, anderseits aber kann die oben angegebene Ausführung der Uebungen auch dießfalls als Leitfaden dienen. Um indeß, der Kürze ungeachtet, die ich in dieser Darlegung beobachte, so viel möglich deutlich zu seyn, mögen folgende Fragen hier stehen. Wenn ich 6 und 1 zu 7 hinzusetze, wie viel erhalte ich? Ich zähle 5 und 7 zur 2ten geraden Zahl, wie viel erhalte ich? Zur 2ten ungeraden Zahl setze ich 1, 2 und 3 hinzu, wie viel entsteht dadurch? Zur 2ten ungeraden und zur 1sten geraden Zahl setze ich 4 hinzu, wie viel machen sie zusammen aus? ꝛc. Ich habe schon im Anfange der Darstellung der Zahl für den Schulunterricht klar zu machen gesucht, daß das, was der Lehrer zum Theil thut, auch abwechselnd vom Schüler gethan werden müsse. Daher richtet auch dieser ähnliche Fragen an seine Mitschüler, die sie dann eben so lösen, als wenn sie vom Lehrer selbst gemacht worden wären. Auch müssen die Abänderungen, Abwechselungen und Sorgfaltsmaßregeln, die ich daselbst angegeben, in ihrem ganzen Umfange berücksichtigt werden. Zu Vermeidung jeder Weitläufigkeit trete ich dießfalls nicht weiter ein und gehe in den Uebungen selbst weiter.

Als Ende des Hinzusetzens kann man den Zögling alle Veränderungen angeben lassen, unter denen sich die eine oder andere Zahl zu bilden fähig ist; zum Beyspiel: unter welchen Abwechselungen kann man 2, 3, 4 ꝛc. erhalten? Zwey erhält man durch 1 und 1, oder durch 2; 3 erhält man durch 1, 1 und 1, oder durch 2 und 1 oder durch 3; 4 erhält man durch 1, 1, 1, und 1, oder durch 2, 1 und 1, oder durch 3 und 1, oder durch 2 und 2, oder durch 4 selbst. So kann man den Schüler ferner untersuchen lassen, welche die veränderten Gestalten seyen, unter denen er 5, 6, 7, 8, 9 und 10 darstellen oder bilden könne. Indeß ist es weder nothwendig noch wichtig, daß das Kind alle Formen erschöpfe; dennoch ist die Aufsuchung aller wesentlichen Veränderungen, die mit den Zahlen, welche über 6 gehen, gemacht werden können, für den Schüler nicht überflüssig. Einzelne Fragen, die aus diesen Reihenfolgen fließen, sind folgende:

Fr.: Wie kann man 5 erhalten? Ant.: durch 5, oder durch 4 und 1, oder durch 3 und 2, oder durch 3, 1 und 1 u. s. w. Fr.: Unter wie vielen Veränderungen ist dieses möglich? Als Ant.: wird er auf seiner Schiefertafel alle diese Veränderungen machen und das Resultat dann angeben müssen. Im Kopf dieses alles aufführen zu wollen, wäre seine Kraft zu frühe auf die Probe gesetzt. Fr.: Aus wie vielen Zahlen kann 5 gebildet werden? Fr.: Welches ist die größte und welches die kleinste Anzahl Zahlen, durch die dieses möglich ist? Alle diese Reihenfolgen und Uebungen stellen den Begriff, den man unter dem Ausdruck „Addition,“ kennt, dar.

Bey Schülern von diesem festgesetzten Alter sind diese Kunstausdrücke zwar nicht nothwendig; um mich aber den Personen, die dieses lesen, verständlicher zu machen, muß ich mich dennoch derselben bedienen. Die Kunstausdrücke in der Zahlenlehre haben für den Schüler nur dann Werth und finden nur dann ihre Anwendung, wenn er sich im vollen Besitze der Sache selbst befindet und dieser Kunstausdruck selber dadurch begründet ist. Auf diese Erläuterung gestützt, bediene ich mich der Kunstausdrücke, ohne daß jedoch der Lehrer im Anfange der Schulfähigkeit seines Zöglinges von dieser Benennung Gebrauch mache. Ich habe anfangs klar zu machen gesucht, wie die Ausführung der Reihenfolgen wirklich statt finden soll. Als Ergänzung sage ich noch: Alle aufgestellten Reihenfolgen müssen nicht nur mit dem Griffel auf der Schiefertafel durch Linien (Striche) dargestellt, sondern jedesmal gleichzeitig vom Schüler auch wörtlich so ausgesprochen werden, wie die schulgemäße Ordnung es erfordert.

Subtraction.

Man läßt den Schüler die Zahlen von 1 bis 10 durch Zeichen (Linien, Striche) auf seiner Schiefertafel darstellen, und von jeder dieser Zahlen läßt man ihn dann wieder 1, 2 u. s. w. bis 10 wegthun (ausstreichen, abziehen). Die Norm unter der dieses statt findet, ist folgende:

1 von 1 weggethan, ist nicht möglich.

1 — 2 — bleibt 1.

1 — 3 — — 2 ꝛc.

2 — 1 weggethan ist unmöglich.
2 — 2 — —
2 — 3 — bleibt 1.
2 — 4 — — 2 ꝛc.

Auf diesem Wege wird fortgefahren; der Schüler zieht 3 hernach 4 ꝛc. von den Zahlen dieser Reihenfolgen ab, und setzt dieses fort, so weit es der Lehrer für nothwendig eradtet. Ich glaube hier nicht weiter in Erinnerung bringen zu müssen, daß das Darstellen der Rechnungsoperation durch Striche, das Rechnen selbst und das mündliche Aussprechen des Gethanenen gleichzeitig statt finden muß. Statt nur zwey, kann der Schüler auch drey Zahlen abziehen, und zwar wieder gleiche und ungleiche. Dieses aber auf 3 und mehrere Zahlen ausdehnen zu wollen, ist bey Schülern, die sich auf dieser Stufe der Bildung befinden, nur in sofern wesentlich, als dieses bey der Addition ausgeführt wird. Was bey der Addition über gerade und ungerade Zahlen und ihre Reihenfolgen gesagt und vorgenommen wurde, kann auch in der Subtraktion statt finden. Die daselbst aufgestellte Norm ist auch hier hinreichend, indem die Subtraction nur als eine Umkehrung der Addition anzusehen und zu behandeln ist. Als Schluß dieser Uebungen sagt der Lehrer zum Schüler: Untersuche, durch was für Veränderungen jede der Zahlen von 1 bis 10 wieder aufgehoben werden könne? Und dieser wird unter anderm bey der Zahl 4 finden, daß sie bey ihrer Aufhebung allen den Veränderungen unterworfen ist, die sie bey ihrer Bildung hatte. Z. B. von 4 kann man 1, 1, 1 und 1 wegthun bis nichts mehr bleibt; oder 2, 1 und 1, oder 3 und 1, oder 2 und 2, oder endlich 4 selbst. Aehnliche Fragen, die bey der Addition jedesmal gegeben worden sind, können auch hier wieder unter der Subtractionsform statt finden, und müssen, nachdem sie sinnlich anschaulich dargestellt worden, unmittelbar darauf folgen. Als Beleg mögen einige Beyspiele über die oben aufgestellten Reihenfolgen hier angeführt werden.

Fr. Wenn man von der Zahl 10 die Zahl 7 wegthut, wie viel bleibt? Wenn man von der Zahl 10, 1 und 6 wegthut, wie viel bleibt dann noch? Von der dritten geraden Zahl werden 2 und 3 abgezogen, es fragt sich, wie viel bleibe? von der fünften ungeraden Zahl wird die dritte ungerade weggethan, es fragt sich, wie viel noch bleibe? Welche Zahl kann man von 4 wegthun, damit nichts bleibe? Welche Zahlen können von 4 weggethan werden, wenn nichts mehr bleiben soll? Auf wie viele verschiedene Arten kann man Zahlen von 5 wegthun, wenn jedesmal nichts mehr bleiben darf? oder aber, wenn noch 1 oder 2 ꝛc. bleiben soll? Welche Zahlen kann man von 4 nicht wegthun? und welche kann man davon wegthun?

Es wäre einerseits sehr schwer, dieses auf Tabellen zu veranschaulichen, anderseits gienge es nicht aus der erzeugend schöpferischen Kraft des Kindes selbst hervor, die mit der geistigen innern Anschauung in keinem Einklange stehen würde. Ich kann also nicht genug wiederholen, daß alles dieses durch einfache Anschauungsmittel, die das Kind selbst hervorbringt, verwirklicht werden müsse. Auf dieser Stufe wird vorzüglich gefordert, daß die Bethätigung der Hand, des Auges und des Mundes gleichzeitig mit der

Berechnung der jeweilig gegebenen Zahlverhältnisse statt finden muß.

Multiplikation.

Man läßt den Schüler die Zahlen von 1 bis 10 wiederum mit Strichen anschaulich darstellen und hernach jede derselben einmal nehmen. Er wird aber sogleich finden, daß die also erzeugten Zahlen unverändert bleiben. Dann läßt der Lehrer den Schüler jede Zahl der obigen Reihenfolgen 3 mal, 4 mal rc. wiederholen.

Die Norm hievon ist:

1 zweymal wiederholt, gibt 2.
2 zweymal wiederholt, gibt 4.
3 zweymal wiederholt, gibt 6.
4 zweymal wiederholt, gibt 8. u. s. w.

Die Fragen hierüber müssen unmittelbar folgen; welches aus dem oben Dargelegten bereits klar ist. Auch die geraden und ungeraden Zahlen sind der nämlichen Wiederholungen fähig, wie dieses bey der Addition vielseitig ausgeführt worden. Zieht man die verschiedenen Uebungen bey der Addition etwas näher zu Rathe, so mögen zur weitern Verdeutlichung dieser Operationen wenige Beyspiele hinreichen und eine ausgedehnte, weitere Ausführung überflüssig machen.

Fr. Wenn man die Zahl 8 dreymal wiederholt, wie viel wird es geben? Die vierte gerade Zahl 2 mal wiederholt, gibt wie viel? Die dritte ungerade Zahl 5 mal wiederholt, gibt wie viel? Wenn man die dritte ungerade Zahl so oft wiederholt, als die zweyte gerade Zahl Einheiten hat, wie viel wird es geben?

Nicht nur der Lehrer, sondern auch der Schüler hat an seine Mitschüler, unter Leitung und Aufsicht, und nachdem die Reihenfolgen zuerst auf der Schiefertafel dargestellt worden, solche Fragen zu machen. Damit aber nicht immer der vorgerücktere Schüler allein antworte, muß der Lehrer die Schulordnung, deren ich diesfalls im Anfange erwähnt, handhaben. Es ist nothwendig, daß ein Schüler, so wie er das Resultat seiner Aufgabe kennt, zum Zeichen nur einen Finger in die Höhe hebe. Ihn auf dieser Stufe mit Quadrat- und Nichtquadratzahlen bekannt und vertraut zu machen, gehört ganz hieher; besonders da die Kenntniß des Quadrats und seiner Eigenheiten ihm schon ganz geläufig seyn muß. Zur Erreichung dieses Endzwecks gibt man dem Schüler die Zahlen von 1 bis 10 so oft zu wiederholen, als jede derselben Einheiten hat. Für eins findet er dann 1; für 2, 4; für 3, 9; für 4, 16 u. s. w. Diesem wird dann beygefügt, daß die also gefundenen Zahlen gewöhnlich Quadratzahlen genannt werden, indem sie mit den Operationen, die wir mit dem Quadrat vornehmen, übereinstimmen. Um dieses noch mehr zu verdeutlichen, kann man das Nämliche auch durch das Quadrat selbst darstellen lassen; z. B. wenn auf eine Linie, die eins vorstellt, ein Quadrat gemacht wird, so gibt es eins; ist die Linie doppelt so lang und wird wieder ein Quadrat auf dieselbe gemacht, so enthält es 4 solcher Quadrate, wie das erste war; ist die Linie 3 mal so lang als die erste und wird wieder ein Quadrat auf dieselbe gemacht, so enthält es 9 Quadrate. Mit einer Linie, die 4 solcher Theile hat, ergibt sich das Quadrat 16. So wird dieses fortgesetzt, bis die Grundlinie 10 Theile und das darauf gemachte Quadrat 100 Quadrätchen enthält. Als weitere Uebung hierin mag Folgendes noch nothwendig werden:

Fr. Welche Quadratzahlen finden sich in den Zahlen 1, 2, 3 bis 10? Der Schüler wird in der Zahl 1 die Quadratzahl 1; in der Zahl 2 die Quadratzahlen 1 und 1; in der Quadratzahl 5 aber die Quadratzahlen 4 und 1 oder die Quadratzahl 1 fünfmal finden u. s. w. Als Endübung mag bey der Multiplikation wie bey der Addition die Untersuchung statt finden, unter welchen Veränderungen die Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. durch Wiederholungen hervorgebracht werden können. So kann 1 durch die Wiederholung von 1, 2 durch die Wiederholung von 1 zweymal oder durch die Wiederholung von 2 einmal; 3 durch die Wiederholung von 1 dreymal, oder durch die Wiederholung von 3 einmal; 4 durch die Wiederholung von 1 viermal oder durch die Wiederholung von 4 einmal, oder durch die Wiederholung von 2 zweymal erhalten werden u. s. w. Diese Uebung wird ohne Schwierigkeit auf gerade und ungerade Zahlen ausgedehnt. Um dem Schüler nicht zu oft das Gleiche zu wiederholen, wird man wohl thun, die diesfalls aufgestellten Reihenfolgen auch noch auf die geraden und ungeraden Zahlen zu übertragen. Die einzelnen Fragen und Aufgaben fangen nach und nach an, eine wichtigere Stelle einzunehmen. So wie die sinnliche Darstellung der Zahlverhältnisse anfängt, weniger

Zeit einzunehmen, so wird dieser Zeitgewinn den diesfalls statt gefundenen Reihenfolgen gewidmet werden müssen. Doch muß man sich hüten, diesen Boden nicht plötzlich und zu schnell zu verlassen, wenn keine Lücke und keine Störung in den Bildungsgang des Kindes gebracht werden soll.

Division.

Die Multiplikation kann hier ganz als Norm dienen und muß als die Umkehrung der ersten betrachtet werden, besonders wenn man den Ausdruck „wie oft eine Zahl in der andern enthalten sey" beybehalten will. Dieses wird auf folgende Weise ausgeführt: wie oft ist 1, oder 2, oder 3 ꝛc. in jeder der Zahlen von 1 bis 10 enthalten? Der Schüler wird finden, daß 1 in 1, 2, 3, 4 ꝛc. auch 1, 2, 3, 4 ꝛc. mal enthalten ist, und folglich durch diese Operation wieder, wie bey der Multiplikation, jedesmal die ursprüngliche Zahl entsteht. Untersucht man das Nämliche mit der Zahl 2, so wird man finden, daß sie in 1 nicht enthalten ist, in 2 aber einmal, in 3 einmal und 1 bleibt als Rest, in 4 zweymal, in 5 zweymal und es bleibt wiederum 1 übrig. So wird diese Uebung mit 3, 4, 5 ꝛc. auf die nämliche Weise fortgesetzt. Wie weit dieses nothwendig sey, überlasse ich hier der Einsicht des Lehrers zu bestimmen. Die weitere Ausführung dieser Ansicht sowohl mit den geraden als ungeraden und Quadratzahlen, so wie auch die einzelnen Fragen, die jedesmal aufgestellt werden können, sind bey der Multiplikation nachzusehen und können mit Leichtigkeit auch auf die Division übertragen und angewandt werden. Um indeß dem ungeübten und schwächern Lehrer hinlänglichen Stoff, besonders im Anfange, in die Hand zu geben, folgen hier noch einige einzelne Fragen: Wie oft ist 3 in 10 enthalten? Welche Zahlen sind in 10 enthalten? und welche nicht? Wie oft ist die erste gerade Zahl in der fünften geraden enthalten? und wie oft in der fünften Quadratzahl? Wie oft ist die zweyte Quadratzahl in der dritten Quadratzahl enthalten?

Da aber die Divisionsform oft unter dem Gesichtspunkt des Theilens zum Vorschein kommt, und dieses allerdings eine Geistesoperation erheischt, die im Leben ihr volles Recht anspricht; so muß sie dem Schüler auch noch von diesem Standpunkt aus anschaulich dargelegt werden. Ihre wichtigern und wesentlichern Reihenfolgen sind folgende: Man läßt den Zögling untersuchen, welche von den Zahlen, von 1 bis 10 an, man in 2, 3, 4 rc. gleiche Theile theilen könne. Er wird finden, daß er die Zahlen 2, 4, 6, 8 und 10 in zwey; 3, 6 und 9 in drey, und 4 und 8 in 4 gleiche Theile theilen könne rc. Eben so kann dieses auch auf ungleiche Theile ausgedehnt werden; und der Schüler wird finden, daß 3, 4, 5, 6, 7 rc. in ungleiche Theile getheilt werden können. Ferner läßt man den Zögling Zahlen aufsuchen, die zugleich in gleiche und ungleiche Theile getheilt werden können. Für diesen Fall wird er wieder 3, 4, 5, 6, 7 rc. finden. Als eine kleine Abänderung mag noch Folgendes hier am rechten Orte stehen: man läßt ihn Zahlen aufsuchen, die gleichzeitig in eben so viele gleiche als ungleiche Theile getheilt werden können. Wichtiger als diese Veränderung ist aber folgende: Zahlen aufzustellen, die man zugleich in 2 und 3, oder in 2 und 4, oder in 3 und 4 ꝛc. gleiche Theile theilen kann. Wenn man zu Brüchen seine Zuflucht nimmt, so können alle Zahlen, ohne Ausnahme, in jede beliebige Anzahl Theile getheilt werden. Sie sind nach dieser Ansicht in's Unendliche theilbar. Das Kind wird aber in diesem Alter nicht auf diese Wahrheit, die der Theilung aller Größen und aller Zahlen zum Grund liegt, fallen, und noch ist es zu frühe, es hierauf aufmerksam zu machen. Einzelne Fragen, die über das Wesentlichste der Divisionsform noch mehr Licht zu geben geeignet sind, ersparen mir eine weitere Ausführung der Reihenfolgen, die auf die gleiche Weise statt finden müssen, wie dieses an mehreren Orten umständlich erörtert wird.

Fr. Wie oft ist 2 in 10 enthalten? oder auch, wie viel beträgt ein Theil, wenn man 10 in 2 gleiche Theile eintheilt? Wie viele Zahlen hat es bis 20, die man in 3 gleiche Theile theilen kann? und wie viele, die nicht in 3 gleiche Theile getheilt werden können? *) Welche Zahlen kann man in 3 gleiche und welche nicht in 3 gleiche Theile theilen? Welche Zahlen kann man zugleich in 2 und 3, oder in 2 und 4 gleiche Theile theilen? Wenn man 18, in 2 und 3 gleiche Theile theilt, wie viel ist einer der zwey und wie viel einer der drey gleichen Theile? Welche Zahlen kann man in 2, 3 und 4 gleiche Theile zugleich theilen, und wie viel ist jeder derselben? Welche

*) Bey dieser Theilung von Zahlen darf kein Rest übrig bleiben.

Zahlen kann man in 2 gleiche und zugleich in 2 ungleiche Theile theilen. Wie viele betragen diese Theile jedesmal? Welches ist die erste Zahl, durch die dieses möglich? welches die zweyte?

Aus diesen einzelnen Fragen wird niemand den Schluß ziehen wollen, daß nicht am Ende jeder Reihenfolge die diesfälligen Fragen folgen müssen, und daß nur um der Kürze halber und um keine Unterbrechungen zu leiden, diese Uebungen so dargelegt werden.

Aeussere Vergleichung der Zahlen unter einander, oder auch arithmetisches Verhältniß derselben.

Die diesfällige erste und einfachste Reihenfolge ist diese: man gibt dem Schüler auf, er solle auf seiner Tafel durch Linien oder Striche Zahlen aufstellen, die einander gleich, und hernach solche, die einander ungleich sind. Für den ersten Fall findet er 1 gleich 1; 2 gleich 2 ꝛc.; für den zweyten aber 1 ungleich 2, 3, 4 ꝛc. Das Ungleiche der Zahlen wird durch das Mehr oder Weniger bestimmt; z. B. Zahlen, wovon die eine immer mehr ist als die andere, und hinwieder solche, wovon die eine immer weniger ist als die andere. So ist 2, 3, 4 ꝛc. mehr als 1, und 2, 3, 4 ꝛc. sind weniger als 10. Dieses Mehr und Weniger durch die Zahl als Einheiten ausgedrückt und bestimmt, z. B. der Schüler soll mehreremal zwey Zahlen aufsuchen, wovon die eine um 1, oder 2, oder 3, oder 4 mehr ist als die andere. Eben so soll er hernach wieder mehreremal zwey Zahlen aufsuchen, wovon die eine um 1, 2, 3, 4 ꝛc. weniger ist als die andere.

Dieses mehr und weniger wird mit dem Kunstausdruck „Unterschied“ benennt. (Sollte dem Zögling dieser Kunstausdruck nicht geläufig seyn, so muß er ihm auf die, im häuslichen Leben geforderte Weise deutlich und geläufig gemacht werden.)

Reihenfolgen hievon wären, Zahlen aufzustellen, die einen Unterschied von 1, 2, 3, 4 zc. bilden, oder wovon der Unterschied gleich ist der kleinern, mehr oder weniger als die kleinere, gleich der größern *) oder um 1, 2, 3, 4 zc. weniger als die größere Zahl.

Würde man einen Unterschied fordern, der um 1, 2, 3 zc. größer wäre als die größere Zahl; so müßte das Kind seine Zuflucht schon zu einer negativen Zahl nehmen, das natürlicherweise hier noch nicht von ihm verlangt werden darf. Diese Vergleichung eben so in Rücksicht auf die kleinere Zahl anzustellen, ist von selbst ohne weitere Angabe von Reihenfolgen und Ausführungsmitteln einleuchtend. Ein großer Theil dieser Reihenfolgen muß noch mit sinnlich anschaulichen Mitteln dargestellt und ganz auf die gleiche Weise behandelt werden, wie ich im Anfange dieser Darstellung für die Schule mich umständlich äußerte, besonders auch in Betreff der Abwechselung im mündlichen Zu-

---

*) Der Unterschied zwischen nichts und jeder Zahl ist gleich der größern Zahl. Nichts oder null ist bey allen Größenverhältnissen der Mittelpunkt zwischen den negativen und positiven Größen. An diesen Mittelpunkt schließen sich sogar in diesen ersten Anfangsübungen schon die negativen Zahlverhältnisse an, und ihre Uebungen und Reihenfolgen sind nicht weniger einfach.

sammensprechen. Dieses wird dem Kinde durch Uebungen so leicht und geläufig, daß eine gehörige Eintheilung im Zusammensprechen ein eigentliches Belebungsmittel der Thätigkeit der Jugend auf dieser Stufe werden muß. Als Vollendung dieser lezten aufgestellten Reihenfolgen mögen folgende Fragen für das, was ich durch dieselben zu erzielen suche, dienlich seyn:

Fr. Welche und wie viele Zahlen sind gleich? Welche sind ungleich? Nenne mir zwey Zahlen, wovon die erste immer um 10 weniger ist als die zweyte. Nenne mir drey Zahlen, wovon die mittlere um 1 mehr ist als die erste und um 1 weniger als die dritte. Nenne mir zwey Zahlen, die gar keinen Unterschied bilden. Suche 2 Zahlen auf, die einen Unterschied von 1 bilden; oder 2 Zahlen, die einen Unterschied bilden, der gleich ist der kleinern, oder aber 2 Zahlen, die einen Unterschied bilden, der kleiner ist als die größere Zahl ꝛc. Wie vielmal zwey Zahlen gibt es, die einen Unterschied bilden? Wie vielmal zwey Zahlen aber, die keinen Unterschied bilden? Zwischen was ist der Unterschied immer so groß als die größere Zahl? und die Schüler werden als Antwort finden, zwischen nichts und jeder Zahl sey der Unterschied immer so groß als die Zahl selbst. Wie viele Zahlen gibt es, die mehr, und wie viele, die weniger sind als 10? Welche Zahl ist um 10 mehr als 10, und welche Zahl ist um 10 weniger als 10?

Welcher von euch, Schüler, ist im Stande, ähnliche Fragen über die aufgestellten Reihenfolgen an seine Mitschüler zu richten? Sollte sich keiner hiefür gleich anheischig machen, so sagt der Lehrer, er werde noch einmal solche

Fragen aufstellen, sie möchten nur recht acht geben, damit sie hernach im Stande seyen, dieses selbst zu unternehmen. In keinem Fall aber darf der Lehrer auf einer solchen Stufe weiter gehen, ehe unter der Anzahl seiner Schüler sich wenigstens einer befindet, der seine Stelle einnehmen kann. Auch glaube ich die Bemerkung überflüssig, daß seine Stelle früher schon dann und wann durch irgend einen seiner Schüler in gehöriger Abwechslung besetzt werden müsse. Mit jedem Vorschritt in diesen Uebungen muß bey ihnen die Kraft und Freyheit, das was sie besitzen, andern mitzutheilen, zunehmen.

Innere Vergleichung, oder geometrisches Verhältniß der Zahl.

Man läßt den Schüler wieder auf seiner Schiefertafel zuerst durch anschauliche Zeichen, durch Striche, Linien ꝛc., Reihenfolgen von Zahlen darstellen, indem man zu ihm sagt: Suche Zahlen auf, wovon die eine immer die Hälfte von der andern ist. Gleichzeitig stellt er auch solche auf, von denen man immer die Hälfte nehmen kann. Für die erste Reihenfolge findet er 1 und 2; 2 und 4; 3 und 6 ꝛc.; für die zweyte Reihenfolge findet er zuerst 2, wovon die Hälfte 1; hernach 4, wovon die Hälfte 2; 6 wovon die Hälfte 3 ist u. s. w. Auf die gleiche Weise kann man den Zögling Zahlen aufsuchen lassen, wovon die eine ein Drittel von der andern ist, und hinwieder andere, von denen der 3te Theil genommen werden kann. Mit 4teln, 5teln, 6teln, 7teln bis 10teln finden die gleichen Reihenfolgen und die nämliche Ausführung statt; eben so mit Zahlen, wovon die eine, statt nur einen Theil, mehrere Theile von der andern ausmacht; z. B. $^2/_3$, $^2/_4$, $^2/_5$ ꝛc. und umgekehrt, Zahlen, von denen man $^2/_3$, $^2/_4$, $^2/_5$ ꝛc. nehmen kann.

Wie dieses zu jeder beliebigen Anzahl von Theilen fortzusetzen sey, ist aus der nunmehr aufgestellten Norm zu ersehen. Um aber durch diese gedrängte Darlegung der Klarheit in nichts zu vergeben, folgen noch ein paar Reihenfolgen:

Stellt Zahlen auf, wovon die eine immer $^3/_4$ von der andern ist.

3 und 4, 6 und 8, 9 und 12 ꝛc. werden diesem entsprechen.

Hernach stellt Zahlen auf, von denen man $^3/_4$ nehmen kann. Sie werden finden: 4, 8, 12, 16 ꝛc.

Das Nämliche auf $^4/_5$, $^5/_6$, $^6/_7$, $^7/_8$, $^8/_9$, $^9/_{10}$ ꝛc. auszudehnen, kann nicht als entbehrlich angesehen werden. Auch wird diese Uebung auf Theile fortgesetzt, die mehr als die Zahl ausmachen, als $^3/_2$, $^4/_3$, $^5/_4$ ꝛc. Ferner kann man die Schüler Zahlen aufstellen lassen, wovon die eine 3 mal die Hälfte der andern ist, wie 3 von 2, 6 von 4, 9 von 6, 12 von 8 ꝛc. Dreymal der halbe Theil kann auch als 1 $^1/_2$ mal die Zahl in's Auge gefaßt und es können ganz die gleichen Reihenfolgen aufgestellt werden; z. B. 1 $^1/_2$ mal 2, 4, 6, 8, 10 ꝛc. So wieder 1 $^1/_3$ mal 3, 6, 9, 12 ꝛc. Versteht sich, daß auch die umgekehrte Form statt finden muß; z. B. 3, 6, 9 ꝛc. ist 3 mal der halbe Theil von welchen Zahlen? und der Schüler wird finden, von 2, 4, 6 ꝛc. Um diese Reihenfolgen noch in einen umfassendern Zusammenhang und in ein heitereres Licht zu setzen, mögen einzelne Aufgaben, die theils aus diesen Reihenfolgen hervorgehen, theils als Ergänzung hieher gehören, hier eine Stelle finden. Werden die Schüler auf eine Weise geführt, daß die Entwickelung der Geisteskraft in dem Grad vorschreitet, als sie in den diesfälligen Uebungsmitteln jetzt weiter geschritten sind; so kann der Lehrer im Aufstellen der Fragen seine Stelle durch einen seiner Schüler vertreten lassen.

Fr. Von welcher Zahl ist 13 die Hälfte? Was ist die Hälfte von 26? 9 ist $^3/_4$ von welcher Zahl? und wie viel macht $^3/_4$ von 12?

3 ist 3 mal so groß als welche Zahl? und wie viel macht $^1/_3$ von 3? Wie viel sind $^3/_2$ von 10? oder anders ausgedrückt: wie viel ist 3 mal der halbe Theil von 10? Wie viel gibt 1 $^1/_2$ mal 2? und 3 ist 1 $^1/_2$ mal so groß als welche Zahl? Eins kann was für ein Theil von einer andern Zahl seyn? Die Antwort wird lauten: ein halber Theil von 2, ein 3tel, von 3, $^1/_4$ von 4 u. s. w. Zwey können was für Theile von andern Zahlen seyn? Antwort: Zwey Zweytel von 2, $^2/_3$ von 3, $^2/_4$ von 4, $^3/_5$ von 5 ꝛc. Zwey ist aber ein Theil einer Zahl; es fragt sich, wie viel die Zahl sey. Antwort $^1/_2$ von 4, $^1/_3$ von 6, $^1/_4$ von 8 ꝛc. Vier können was für Theile von andern Zahlen seyn? Antwort: ein Theil, oder 2 Theile, oder 4 Theile. Ist aber vier, ein oder 2 oder 4 Theile, was ist jeder derselben? Antwort: bey einem Theil $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ꝛc. und zwar von 8, 12, 16 ꝛc.; bey 2 Theilen $^2/_2$, $^2/_3$, $^2/_4$ ꝛc. und zwar von 4, 6, 8 ꝛc.; bey 4 Theilen $^4/_4$, $^4/_5$, $^4/_6$ ꝛc. und zwar

von 4, 5, 6 ꝛc.; oder aber $^4/_1$ (gewöhnlich ausgedrückt 4 mal so groß), $^4/_2$, $^4/_3$, $^4/_4$ ꝛc., und zwar von 1, 2, 3, 4 ꝛc.

Aus der Ausdehnung dieser eben ausgeführten Verhältnisse von zwey Zahlen auf drey und vier Zahlen entsteht eigentlich erst das geometrische Verhältniß. Wenn man in naturgemäßen Reihenfolgen zu diesen Verhältnissen übergehen will; so hoffe ich, daß jederman die Dringlichkeit der oben aufgestellten Uebungen einsehen werde.

Der einfachste Stufengang ist dießfalls folgender:

Stellet auf euren Tafeln durch Zeichen wieder Reihenfolgen auf, wovon 1 der gleiche Theil von 2 ist, wie 2 oder 3 ꝛc. von welcher Zahl? Der Schüler wird finden, daß 1 der gleiche Theil von 2 ist, wie 2 von 4, wie 3 von 6, wie 4 von 8 ꝛc. Eben so werden Verhältnisse angegeben, die das mehr= oder vielfache der Theile ausdrücken, wie dieses oben bey 2 Zahlen auf eine sehr vielseitige Weise ausgeführt wurde. So sind 2 die gleichen Theile von 3, wie 2, 4, 6, 8, 10 ꝛc. von welchen Zahlen? Drey sind die gleichen Theile von 4, wie 3, 6, 9, 12 ꝛc. von welchen Zahlen? Statt des Ausdrucks gleicher Theile bedient man sich gewöhnlich der Worte „sie verhalten sich." Um dem Schüler diesen Ausdruck auf eine naturgemäße Weise deutlich zu machen, können die nämlichen Reihenfolgen unter diesem Kunstausdruck noch einmal vorgenommen werden. Deßwegen werde ich hier noch einige Aufgaben folgen lassen, die die ganze Ausdehnung dieser Uebungen in's Licht zu setzen geeignet sind.

Fr. 3 verhält sich zu 4, wie 9 zu welcher Zahl?

21 verhält sich zu 24, wie 49 zu welcher Zahl? Um diese Aufgabe zu lösen, muß 21 als 7 mal 3, und 24 als 8 mal 3, oder als das Verhältniß von 7 zu 8 in's Auge gefaßt werden: 49 ist hinwieder ⅞ von 56.

10 verhält sich zu einer unbekannten Zahl, wie 1 zu 3; welches wird diese Zahl seyn? Antwort 30; denn 1 ist ⅓ von 3, und 10 ist ⅓ von 30.

20 verhält sich zu 30, wie eine unbekannte Zahl zu 9; welches wird wohl diese Zahl seyn? Um diese Aufgabe zu lösen, muß 20 als ⅔ von 30 in's Auge gefaßt werden, und die unbekannte Zahl wird auch ⅔ von 9 seyn.

Ein unbekannte Zahl verhält sich zu 20, wie 4 zu 5; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey? Antwort 16; denn 4 ist ⅘ von 5, also muß die zu suchende Zahl auch ⅘ von 20 oder 16 seyn.

Alles, was bis jetzt mit den Einheiten als Uebung der Entwickelung der geistigen Anlagen des Kindes vorgenommen worden, ist unvermischt in seinen karakterisirenden Formen erhalten und durchgeführt worden. Die Gesichtspunkte, unter denen die Zahl bis jetzt aufgefaßt wurde, können aber auf die mannigfaltigste Weise mit einander verbunden werden. So kann z. B. die Addition mit der Subtraction, die Addition mit der Multiplication, die Division mit den arithmetischen oder geometrischen Verhältnissen ꝛc.; ferner die Addition mit der Subtraction und mit der Multiplication zugleich, oder die Addition mit der Subtraction und mit der Division ꝛc. ꝛc. verbunden werden. Diese Ansicht geht so klar aus dem zu befolgenden Gange hervor, daß auch ohne Bemerkung jeder

Lehrer von selbst auf diese Verbindungen und Zusammenstellungen gefallen wäre. Wie weit diese Verbindungen möglich sind, kann mathematisch erschöpfend dargelegt werden; wie weit sie aber für die Schüler als Entwickelung seiner geistigen Kräfte ausgedehnt und benutzt werden können, muß hier näher bestimmt werden. Es ist weder wesentlich noch nothwendig, daß diese Uebungen mit den Einheiten bis an's Ende durchgeführt werden, ehe man die einzelnen Uebungen unter sich verbindet. Befindet sich der Schüler bey der Subtraction, so kann sogleich die Addition damit verbunden werd .:, und nach der Beendigung der Multiplication verbindet man die Addition und hernach die Subtraction damit. Bey noch wohl jungen Kindern bietet dieser Gang Vorzüge dar, die nicht mißkannt werden dürfen. Ich wählte daher diese Art von Stufenfolge, um einen deutlichern Typus der Zahl als Entwickelung der Geisteskräfte des Kindes aufstellen zu können, und bin überzeugt, daß jeder Lehrer, der die Selbstständigkeit jeder einzelnen Uebung aufzufassen fähig ist, auch die Verbindungen leicht nach Bedürfniß zu machen im Stande seyn wird. Um dieses jedoch zu erleichtern, will ich einige einzelne Aufgaben hier noch beyfügen.

Fr. Wenn man 10, 3 und 4 zusammenzählt, und dann wieder 1 und 2 davon abzieht, wie viel wird bleiben? Welche Zahl muß man zu 10 hinzusetzen, wenn man 7 davon abziehen will, und dennoch 20 bleiben soll? Wenn man zu drey 2 hinzuzählt, und dann diese Zahl so oft wiederholt, als sie dadurch Einheiten erhalten hat, wie viel wird es geben? Wenn die zweyte Quadratzahl so oft wiederholt wird, als sie Einheiten hat, wie oft ist sie in der 6ten Quadratzahl enthalten? Ist der Rest, der noch übrig bleibt, eine Quadratzahl, und welche? Wenn man zur 2ten Quadratzahl die 2te gerade Zahl addirt und davon die 1ste ungerade abzieht, wie viel wird dann noch bleiben? Wenn die Zahl, welche 2 mal in 12 enthalten ist, so oft wiederholt wird, als die 2te gerade Zahl Einheiten hat, wie viel wird dieses geben? Von 10 werden 3 abgezogen und der Rest ist um 6 weniger als welche Zahl? Der Unterschied zwischen 1 und 4 ist ein Viertel von welcher Zahl? $\frac{2}{3}$ von 12 sind 4 mal der Unterschied zwischen welchen zwey Zahlen? Von der Hälfte einer Zahl sollen 7 abgezogen werden und noch 3 bleiben, was ist dieses für eine Zahl? Die Zahl, die um 3 mehr ist als 3, soll $\frac{3}{4}$ von einer andern Zahl seyn; es fragt sich, welches diese Zahl sey? Wenn die erste Zahl 3 ist und hernach 10 Zahlen folgen, wovon jede folgende immer 3 mehr ist als die vorhergehende, wie viel wird die 10te Zahl seyn? wie viel die 1ste und 10te, wie viel die 2te und zweytletzte zusammen? ꝛc. Wie viel ist die Hälfte von der Hälfte von 40? 6 ist die Hälfte vom 3tel, von welcher Zahl? 10 ist $\frac{1}{6}$ von $\frac{6}{7}$ von welcher Zahl? Wie viel machen $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von 40? Die erste Zahl, die man in 2 und zugleich auch in 3 gleiche Theile theilen kann, ist die Hälfte von welcher Zahl? Die Zahl, die um 3 mehr ist als 1, verhält sich zu 12, wie 11 zu welcher Zahl? Die Zahl 4 so oft wiederholt, als sie Einheiten hat, verhält sich zu 20, wie 12 zu welcher Zahl? Der Unterschied zwischen 10 und 16 verhält sich zu 16, wie 30 zu welcher Zahl? Die Hälfte von einer unbekannten Zahl verhält sich zu 12, wie 1 zu 4; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey? Die Hälfte von der Hälfte von 100 verhält sich zu 100, wie 11 zu welcher Zahl? Welche Zahl verhält sich zur Hälfte von der Hälfte von 60, wie 7 zu 21? Die Hälfte und ein Drittel von 6 verhalten sich zu 6, wie 25 zu welcher Zahl?

Diese wenigen Beyspiele zeigen, wie leicht diese Verbindungen einerseits vom Lehrer gemacht, anderseits wie diese Aufgaben mit eben der Leichtigkeit vom Schüler gelöst werden können, wenn dieser nur einigermaßen das Wesen der verschiedenen Operationen der Zahl in ihrem unverbundenen Zustand aufgefaßt hat. Würde er aber Aufgaben, die aus diesen Verbindungen hervorgehen, nicht mit der größten Leichtigkeit zu lösen im Stande seyn; so darf angenommen werden, daß er in den einfachen Reihenfolgen der Zahl nicht gehörig geübt und gestärkt worden sey; deßwegen müßte er wieder zu den einfachen, unverbundenen Uebungen zurückkehren. Die Zahl, als Typus der geistigen Entwickelung des Kindes in's Auge gefaßt, fordert als allgemeine Regel, nach der man sich zu richten hat, daß der Schüler jede Aufgabe, in welcher Verbindung sie ihm auch immer dargelegt werde, aufzulösen im Stande sey. Kann er nun aber die eine oder andere Aufgabe, die nur aus Verbindungen hervorgehen, nicht lösen, so darf man annehmen, daß er den geforderten Grad seiner geistigen Entwickelung durch die Zahl noch nicht erreicht habe. Damit der Lehrer und der Schüler Gelegenheit finden, ihre dießfälligen Kräfte zu prüfen, so darf man die letztaufgestellten Fragen als Probierstein gebrauchen.

Diese umständliche Darlegung der Zahl durch die Einheiten soll als Norm dessen, was ich hier der Brüche halber darstellen werde, dienen. Damit ich mich aber kurz fasse, schicke ich ein paar leitende Gesichtspunkte voran. So wie die Zahlverhältnisse dem Kinde durch Einheiten zur Anschauung gebracht worden, muß dieser Gang auch noch mit Brüchen befolgt werden, wenn es zu richtigen Begriffen vom Ganzen dieser Verhältnisse gelangen soll. Die Grundsätze, die ich bey den Einheiten aufstellte, finden auch hier wieder ihre volle Anwendung. Das einfachste Anschauungs- und Versinnlichungsmittel der Brüche ist wieder die Linie, ohne jedoch einen Mißgriff zu thun, wenn man dieses Mittel auch durch andere Gegenstände ersetzen wollte. Aus mehrern Gründen darf man für die einfachern Bruchverhältnisse der geraden Linie den Vorzug einräumen. In Folge dessen sagt der Lehrer zum Schüler: Stelle auf deiner Tafel 10 gerade, gleichlange Linien dar. Dann sagt er wieder: er solle die erste Linie ungetheilt lassen, die zweyte in zwey, die dritte in drey gleiche Theile theilen, u. s. w., bis er die 10te Linie in 10 gleiche Theile getheilt. Faßt man jede dieser Linien als ein Ganzes in's Auge, so ist die 1ste Linie ein Ganzes die 2te auch ein Ganzes, das 2 Halbe enthält, die 3te Linie wieder ein Ganzes mit 3 Dritteln, die 4te ein Ganzes von 4 Vierteln u. s. w. Aus diesem geht dann für den Schüler folgender Anschauungsbegriff der Ganzen und der Brüche hervor. Ein Ganzes ist so groß als 2 Halbe, als 3 Drittel, als 4 Viertel ꝛc. Zwey Halbe sind so groß als 3 Drittel, als 4 Viertel ꝛc., $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6}$

u. s. w. Auch ist es gut, wenn man dieses dem Schüler auf die, bey den Einheiten hinlänglich entwickelte Form mündlich aussprechen läßt, damit ihm die Fundamentalbegriffe, auf welchen die Brüche ruhen, nicht nur deutlich, sondern auch geläufig werden.

Einzelne Fragen hierüber sind noch nicht entbehrlich:

Fr. Sind $^{3}/_{3}$ oder $^{4}/_{4}$ mehr? Wie viele 12tel werden zu einem Ganzen erfordert? In wie viele Theile muß man das Ganze eintheilen, um die größten, und in wie viele, um die kleinsten Theile zu erhalten? Antwort: das Ganze, das in die größte Anzahl Theile getheilt wird, erhält die kleinsten Theile.

Hat der Schüler eine richtige Anschauung von den Ganzen und Brüchen, so werden alle Uebungen und Reihenfolgen, die bey den Einheiten aufgestellt worden, auch auf Brüche von einerley Art ausgedehnt; z. B. bey der Addition: es werden zu einem Ganzen 1, 2, 3, 4, 5 Halbe rc. gezählt und der Schüler untersucht, wie viele Ganze es jedesmal gebe. Eben so werden Drittel, Viertel, Fünftel rc. hinzugezählt und das Nämliche untersucht. Es ist aber in den dießfalls aufzustellenden Reihenfolgen nicht nöthig, höher als bis zur Anzahl von 10 Halben, Dritteln, Vierteln rc. hinaufzusteigen. Deßgleichen werden auch Ganze und Brüche zu einem Ganzen gezählt, wie z. Ex. zu einem Ganzen soll $1^{1}/_{2}$, $1^{3}/_{2}$, $1^{1}/_{2}$ gezählt werden. Einzelne Fragen geben mit dem, was über die Einheiten dießfalls aufgestellt worden, hinlängliches Licht, und ich bitte, dieselben mit den daselbst aufgestellten Reihenfolgen in Zusammenhang zu bringen.

Fr.

Fr. Zu 2½ wird 4½ gezählt, es fragt sich, wie viele Ganze dieses gebe? Wie viele 10tel müssen zu 2⁷⁄₁₀ gezählt werden, um 9⁷⁄₁₀ zu erhalten? Zu ⅓ hat man eine Anzahl Drittel gesetzt und 4⅔ erhalten, es fragt sich, wie viele Drittel man hinzugesetzt habe? Man wünscht, durch Halbe ein Ganzes zu erhalten, unter welchen Veränderungen kann dieses geschehen? Desgleichen durch Drittel oder Viertel ꝛc., es fragt sich, unter welchen Abänderungen dieses möglich sey. Die 4te gerade Zahl in 3tel aufgelöst, giebt wie viele Ganze? Die 5te ungerade Zahl Ganze wird wie viele Halbe geben? Wenn man zu einem Ganzen und ⅓ zwey Drittel und 3⅓ hinzuzählt, wie viel wird dieses geben?

Die Uebungen, Reihenfolgen und einzelnen Fragen müssen aber bey den einfachen Brüchen nicht mit der Ausdehnung statt finden, wie dieses bey den Einheiten geschehen ist, indem das Wesen davon sich in letzterm begründet hat.

Subtraction.

Einige einzelne Fragen mit Hülfe dessen, was bey den Einheiten und der Addition der Brüche aufgestellt wurde, sind hier ein hinreichender Leitfaden.

Fr. Wenn ⅘ von 10⅘ abgezogen werden, wie viele Ganze und Fünftel bleiben noch? Wie viele 7tel muß man von 1⅐ abziehen, wenn noch ein Ganzes bleiben soll? Wie viele Halbe muß man von 10 Ganzen abziehn, wenn noch 1½ bleiben soll? Wie viele 5tel muß man von 2⅘ abziehen, wenn man will, daß nichts mehr bleibe? Unter was für Veränderungen kann man 4tel von einem Ganzen abziehn, wenn noch 1/4 oder 2/4 rc. bleiben sollen?

Wenn auch hier keine Reihenfolgen aufgestellt worden sind, die diese Verhältnisse sinnlich anschaulich darstellen, so darf nicht angenommen werden, es sey auf dieser Stufe entbehrlich, sondern die gedrängte und kurze Darlegung fordert eine Auslassung von dem, was nicht absolut nothwendig ist. Uebrigens kann auch für die Subtraction die gerade Linie auf die gleiche Weise als Anschauungsmittel benutzt werden, wie dieses bey der Addition geschehen ist.

Verbindung der Addition mit der Subtraction.

Einzelne Fragen sind auch für diesen Endzweck hinreichend:

Fr. Wenn man zu 1 Ganzen 3½ hinzusetzt und hernach 1½ davon abzieht, wie viel wird dann noch bleiben? Wie viel muß man zu 4/5 zählen, wenn man 10/4 abziehn will und nichts mehr bleiben soll? Wenn man zu 2/2 drey Drittel hinzuzählt und dann wieder 1½ davon abzieht, wie viel wird bleiben?

Sollen 2/2 und 3/3 zusammengezählt werden, so muß man jeden Bruch als ein Ganzes ins Auge fassen; sonst müßte man Brüche von verschiedenen Arten addiren, welches später folgen wird.

Fr. Von 21/3 werden 12/4 abgezogen und hernach 10/5 wieder hinzugesetzt, es fragt sich, wie viele Siebentel dieses gebe?

Diese Aufgabe muß ebenfalls auf obige Weise gelöst werden.

Multiplication.

Da es nicht mehr nothwendig ist, den Schüler auf dieser Stufe und besonders in diesem Fall die Zahlverhältnisse sinnlich anschaulich darstellen zu lassen; so könnte die früher aufgestellte Norm durch eine andere abgewechselt werden. Ich machte schon im Anfange die Bemerkung, daß die Ziffer die Stelle der sinnlichen Anschauungsmittel einzunehmen und bey den Brüchen das Gedächtniß zu unterstützen bestimmt und geeignet sey; und hier kann ohne Nachtheil für die Geistesentwickelung des Kinds der Anfang damit gemacht werden. Auf welche Weise das Kind zur Kenntniß der Ziffern geführt werden müsse, wird durch die Lehre des Zifferrechnens selbst, die später diesem Bande nachfolgen soll, umständlich dargelegt.

Statt mit geraden Linien stellt der Schüler mit Ziffern auf seiner Schiefertafel folgende Reihenfolgen dar:

Fr. 10 wird so oft wiederholt, als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ jedesmal einen Theil eines Ganzen ausmacht, wie viel wird es jedesmal geben? Bezeichne die gefundenen Resultate mit Ziffern auf deiner Schiefertafel.

Wenn man 10 so oft wiederholt, als $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ rc. Theile des Ganzen betragen; wie viel wird es jedesmal Ganze geben?

Auch diese Reihenfolge muß der Schüler durch Ziffern auf der Tafel mit dem jedesmal gefundenen Resultat aufzeichnen. Man darf auf dieser Stufe anfangen, die Kunstwörter, „Multiplication, Division rc.“ ohne Nachtheil für die Entwickelung der Geisteskräfte des Kindes zu gebrauchen, und zwar auf folgende Weise:

10 wird so oft wiederholt, als $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$ ꝛc. Ganze betragen, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt: 10 wird durch $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$ ꝛc. multiplicirt, wie viel wird es geben? Bezeichnet die gefundenen Resultate wieder durch Ziffern auf euren Schiefertafeln.

Wenn $10\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$ multiplicirt werden, so fragt es sich, wie viel es jedesmal gebe? Im Falle der Schüler Anstand nimmt, diese Reihenfolgen also zu lösen; so setze man ihm neben diesen Kunstausdruck die natürliche Benennung. Um diese Art von Reihenfolgen zu lösen, werden z. B. die 10 Ganzen und das Halbe in Halbe verwandelt, welches 21 Halbe giebt; oder man nimmt den 3ten Theil vom Ganzen und verwandelt den Rest, der von 10 übrig bleibt, in Halbe, zählt $\frac{1}{2}$ dazu und nimmt noch einmal den 3ten Theil.

Das Nämliche wird mit den andern Aufgaben fortgesetzt. Noch folgen ein paar einzelne Fragen, die das Wesen dieser Uebung in ein noch klareres Licht setzen werden:

Fr. Mit welcher Zahl muß man 10 multipliciren, wenn man $3\frac{1}{3}$ erhalten soll? Antwort: mit $\frac{1}{3}$.

Kann man 10 mit jedem Bruche, auch mit jeder Anzahl Ganzen und Brüchen multipliciren? Wenn die 2te ungerade Zahl Ganze mit $\frac{5}{6}$ multiplicirt wird, wie viele Ganze giebt es? Mit welchem Bruche kann man $1\frac{1}{5}$ multipliciren, ohne daß dadurch doppelte Brüche entstehen? Antwort: $1\frac{1}{5}$ sind $\frac{6}{5}$; sie können ein halbes mal genommen oder mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt werden, und es giebt $\frac{3}{5}$;

ferner können sie mit $^1/_3$ oder auch $^2/_3$, oder mit $^1/_6$, $^2/_6$, $^3/_6$, $^4/_6$ und $^5/_6$ multiplicirt werden.

Ueber die Verbindungsweise der Multiplication mit der Addition oder mit der Subtraction, oder der Addition mit der Subtraction und Multiplication ꝛc. werde ich in Zukunft keine weitere Bemerkung mehr machen und keine fernere Anleitung mehr geben, sondern mich ein für allemal auf das berufen, was ich dießfalls bey den Einheiten aufstellte und was bey den Brüchen in Kürze nur als Wiederholung angesehen und behandelt werden muß.

Division.

Man läßt den Schüler wieder auf seiner Schiefertafel durch Hülfe der Ziffern untersuchen, wie oft $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ꝛc. in 10 enthalten sey; oder er fragt ihn, welches einerley ist: wie viel wird 10 mit $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ꝛc. dividirt, jedesmal geben? Eben so läßt man ihn untersuchen, wie viel 10 mit $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ ꝛc., oder mit $1^1/_2$, $1^1/_3$, $1^2/_3$ ꝛc. dividirt, jedesmal gebe? Oder welches wieder einerley ist, er läßt ihn untersuchen, wie oft diese Brüche in 10 enthalten seyen. Auch hier muß, wenn man es noch nothwendig findet, der Naturausdruck dieser Rechnungsweise neben den Kunstausdruck derselben gesetzt werden. Deßgleichen werden $10^1/_2$ mit $^1/_2$, $1^1/_2$, $2^1/_2$, $3^1/_2$ ꝛc. dividirt. Brüche von verschiedener Art können hier noch nicht mit einander dividirt werden. Um dieses auf die kürzeste und einfachste Weise zu lösen, verwandelt man alles in Halbe. Ueberhaupt können bey der Division, wie bey der Multiplication, nur Brüche einerley Art, sowohl in den einzelnen

Aufgaben als auch in den Reihenfolgen gegeben werden. Es ist wichtig, daß die Multiplication und Division theils verbunden und theils neben einander gestellt werden, weil durch diese zwey Rechnungsarten in ihren Resultaten etwas ganz Verschiedenes hervorgienge, wenn man es mit den Einheiten vergleichen würde. Als Beleg mögen folgende Beyspiele dieses außer Zweifel setzen.

Stellt auf euern Schiefertafeln durch Ziffern die Resultate dar, die es giebt, wenn man 10 durch $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$ und $^1/_{10}$ multiplicirt, und eben so, wenn 10 mit $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ rc. dividirt wird. Multiplicirt 10 mit $1^1/_2$, $1^1/_3$, $1^1/_4$ rc. und dividirt 10 wieder mit den nämlichen Zahlen.

Einzelne Fragen werden die Nothwendigkeit dieser Verbindung außer allen Zweifel setzen.

Fr. Wie viel giebt 10 mit $^1/_2$ multiplicirt, und wie viel mit $^1/_2$ dividirt? Erhält man durch die Division oder Multiplication eine größere Zahl?

Um dieses in ein noch vollständigeres Licht zu setzen, wird man die gleiche Frage auch in Ganzen noch an die Schüler richten.

Fr. Wenn man 10 mit 2 (zwey Ganzen) multiplicirt oder durch 2 dividirt, wie viel wird man in dem einen und andern Fall erhalten? Wird man durch die Multiplication oder durch die Division eine höhere Zahl erhalten? Durch was unterscheiden sich die Resultate der Brüche zwischen der Multiplication und der Division bey den Brüchen und Ganzen?

Diese Fragen werden um so nothwendiger, als in dem gewöhnlichen Leben die Multiplication immer als eine Form der Vermehrung bekannt ist, während die Division als die Verringerung angesehen wird.

Aeußere Vergleichung der Zahl, oder arithmetisches Verhältniß mit Brüchen.

Lehrer: Stellt auf euren Tafeln durch Ziffern folgende Reihenfolge dar:

1 Ganzes ist mehr als welche Zahlen?

Der Schüler wird finden, es sey mehr als $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$ ꝛc.

$^1/_2$ ist aber weniger als welche Zahl?

Die Resultate werden seyn: 1, $1^1/_2$, 2, $2^1/_2$ ꝛc.

$^3/_4$ sind mehr und sind weniger als welche Zahlen?

Hier folgen einzelne Fragen, welche diese Verhältnisse in allen Richtungen näher bezeichnen.

Fr. Was ist der Unterschied zwischen $^3/_4$ und $10^1/_4$?

Sucht 2 Zahlen auf, die beyde Brüche sind, und wovon der Unterschied gleich ist der kleinern, oder gleich der größern Zahl. Suchet 2 Zahlen auf, die Ganze und Brüche enthalten, die aber einen Unterschied haben, der gleich, mehr oder weniger ist als die kleinere Zahl.

Soll dieser Unterschied der größern Zahl gleich werden, so müßte die kleinere wieder, wie ich bey den Einheiten bereits in's Licht gesetzt, null seyn, und auch von hier aus werden die negativen Zahlen in den Brüchen entwickelt werden. Würde man aber angeben, der Unterschied soll größer oder mehr seyn als die kleinere Zahl; so wären die negativen Verhältnisse derselben an Brüche angeknüpft, welches auf eine höhere Stufe gehört. Es ist nicht unwichtig, diese Uebung der Zahlverhältnisse noch mit der Addition, Subtraction, Multiplication 2c. in Verbindung zu bringen. Wer aber das Wesen und den Geist der gegenwärtigen Darlegung auffaßt, kann diese Combination gewiß mit der größten Leichtigkeit machen. Selbst den stärkern und gewandtern Schülern darf zugemuthet werden können, daß sie auf Verlangen des Lehrers die eine oder andere Verbindungsweise auszuführen im Stand seyn.

Innere Vergleichung oder geometrisches Verhältniß der Zahl mit Brüchen.

Lehrer: Untersucht auf euren Tafeln, wie viel der halbe, 3te, 4te 2c. Theil von 10 Ganzen sey, und bemerkt jedesmal die Resultate mit Ziffern. Seht auf die nämliche Weise, von was $^1/_2$ die Hälfte, der Drittel, der Viertel u. s. w. sey? Wie viel macht die Hälfte von 1, 3, 5, 7 2c., und umgekehrt: $^1/_2$, $1^1/_2$, $2^1/_2$, $3^1/_2$ ist die Hälfte von welcher Zahl?

Was hier mit einem Theil statt gefunden, kann auch mit mehrern Theilen ganz auf die gleiche Weise geschehen. Einzelne Fragen werden mit dem, was über die Einheiten aufgestellt worden, auch für den schwächern und ungewandtern Lehrer Stoff genug geben, das ihm allenfalls Mangelnde zu ersetzen und die dießfälligen Lücken auszufüllen.

Fr. $4^1/_3$ ist ein Fünftel von welcher Zahl?

Hier, wie überall bey ähnlichen Aufgaben, kann man zuerst die Ganzen und Brüche in einen Bruch verwandeln; z. B. $4^1/_3$ geben $^{13}/_3$ und diese sind $^1/_5$ 2c. Auch kann es auf folgende Weise gelöst werden: 4 ist $^1/_5$ von 20, und $^1/_3$ ist $^1/_5$ von $^5/_3$, welches zusammen $21^2/_3$ ausmacht.

$^4/_5$ sind die Hälfte von der Hälfte von welcher Zahl? Wie viel macht die Hälfte von der Hälfte von vier Fünfteln? Ein Ganzes und $^1/_9$ sind ein und mehrere Theile von welcher Zahl? Antwort: $^{10}/_9$ können die Hälfte, oder ein Drittel, oder ein Viertel ꝛc. seyn; auch können $^{10}/_9$ zwey Theile seyn, und zwar $^2/_3$, $^2/_4$, $^2/_5$ ꝛc., oder 5 Theile, als $^5/_6$, $^5/_7$, $^5/_8$ ꝛc., oder endlich auch 10 Theile, wie $^{10}/_{11}$, $^{10}/_{12}$ ꝛc.

$^1/_2$ verhält sich zu einem Ganzen, wie 1, 2, 3 ꝛc. zu welcher Zahl? $^1/_2$ verhält sich zu 1 Ganzen, wie $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ ꝛc. zu was? $^2/_3$ verhalten sich zu 1 Ganzen, wie 2, 3, 4 ꝛc. zu welcher Zahl? $1^1/_2$ verhalten sich $2^1/_2$, wie 1, 2, 3 ꝛc. zu welcher Zahl?

So wie bis jetzt das vierte Glied des geometrischen Verhältnisses immer als unbekannt gesucht wurde; so kann das 1ste, oder 2te, oder auch 3te Glied als unbekannt angegeben werden, worüber das Nähere und Weitere bey den Einheiten nachzusehen ist. Auch die gerade und ungerade, so wie die Quadratzahl, findet nicht nur in dieser, sondern in allen vorhergehenden Uebungen volle Anwendung; es ist aber bey den Brüchen weniger nothwendig, dieses umständlich zu behandeln. Um dem Erzieher und Lehrer in nichts zu mangeln, was ihm zu einer naturgemäßen und richtigen Führung der Jugend dienlich werden könnte, mögen noch folgende Bemerkungen ihre Stelle finden. Die Bruchverhältnisse durch sinnlich anschauliche

Gegenstände zum Bewußtseyn zu bringen, ist, wie ich im Anfange der Darlegung der Brüche zeigte, so unentbehrlich als dieses bey den Einheiten der Fall war; die Zeit aber, die hierauf verwendet werden darf, wird auf dieser Stufe schon bedeutend vermindert. Auch die Reihenfolgen, die im Anfange einer jeden Uebung statt fanden, müssen in dem Grad als man hierin weiter vorschreitet, verkürzt werden, so wie die einzelnen Fragen, die dießfalls aufgestellt worden. Es kann niemand mehr entgehen, daß der Gebrauch der Ziffer als Erinnerungsmittel, auf dieser Stufe, schon eine bedeutende Stelle einnimmt; doch müssen diese Zeichen nur als dem Gedächtniß zu Hülfe kommend, benutzt werden. An mehrern Stellen habe ich gezeigt, daß der Schüler den Anfang nur mit kleinen (niedern) Zahlen, die 10 bis 20 nicht übersteigen dürfen, machen müsse, daß dieses nach und nach, aber unvermerkt bis auf 100 und noch höhere Zahlen erweitert, und jetzt ohne Nachtheil wenigstens einzelne Aufgaben in diesen erhöhten Zahlen dem Schüler gegeben werden können. Die Brüche ungleicher Art können auf eine ganz gleiche Weise behandelt werden, wie die einfachen, deßwegen werde ich hierüber nur in gedrängter Kürze diesen Gegenstand behandeln und mir nur da einige Ausdehnung erlauben, wo es sich um etwas Eigenthümliches der ungleichartigen Brüche handelt.

A d d i t i o n.

Um verschiedenartige Brüche zusammenzuzählen, wird vor allem aus erfordert, daß sie unter einerley Art Brüche, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt, unter gleiche Benennungen gebracht werden. Um dieses zu erzielen, können wieder die verschiedenartigsten Gegenstände als Anschauungsmittel benutzt werden, um richtige Begriffe im Schüler zu erzeugen. Das Quadrat kann hiefür allerdings benutzt werden und ist lange als ganz vorzüglich geeignet hiefür benutzt worden. Auch bietet es für Brüche von zweyerley Arten allerdings einen Vorzug dar, den die Linie nicht hat. Die Ausdehnung dieses Vorzugs aber auf Brüche von dreyerley und noch mehreren Arten findet in diesem Anschauungstypus Schwierigkeiten, die durch denselben nicht so leicht überwunden werden können. Die Anschauung der verschiedenen Arten von Brüchen an einen Gegenstand zu knüpfen, dem eine allgemeine Anwendung mangelt, würde eine Beschränkung herbeyführen, die der geistigen Entwickelung der Kräfte des Kindes sehr hinderlich wäre; deswegen wird man auch hier wieder ganz zweckmässig zu Werke gehen, wenn man auch da die Linie als Anschauungsform für die Schule wählt und sie also gebraucht: Der Schüler soll mit Hülfe der Linien untersuchen, in welchem Bruche sich Halbe und Drittel vereinigen, oder in was für einen Bruch ein Ganzes verwandelt werden muß, wenn man in demselben Halbe und Drittel finden soll. Um dieses zu verwirklichen, läßt man den Schüler eine Linie, die ein Ganzes darstellt, zuerst in 2 gleiche Theile, hernach jeden dieser Theile wieder in 3 gleiche Theile theilen, wodurch das Ganze 6 gleiche Theile erhält, die Halbe und Drittel bilden. Der Lehrer fordert den Schüler auf, die Halben und eben so die Drittel auf der Linie durch einen starken Punkt zu bezeichnen, und dieser wird dann leicht finden, daß auf das Halbe $3/6$ und auf den Drittel $2/6$ des Ganzen kommen. Auch weiß der Schüler aus der Behandlung der Zahl mit Einheiten, daß man den halben und dritten Theil von 6, 12, 18 ꝛc. nehmen kann. Wenn man also ein Ganzes suchen soll, in dem sich der halbe und dritte Theil in gleiche Theile auflösen läßt, so muß man dasselbe entweder in 6, oder 12, oder 18 ꝛc. gleiche Theile theilen. Diesem zufolge vereinigen sich die Halbe und Drittel auch in den Sechsteln, Zwölfteln, Achtzehnteln u. s. w. Man kann die Einheiten auf die nämliche Weise, wie die gerade Linie, als Anschauungstypus benutzen und wird auch auf diesem Wege finden, daß sich die Halbe und Drittel in einem Ganzen vereinigen, das 6 gleiche Theile hat, aber eben so leicht 12, 18 ꝛc. gleiche Theile haben kann. Diesem gemäß vereinigen sich Halbe und Viertel in einem Ganzen, das 4, 8, 12, 16, 20 ꝛc. gleiche Theile hat. Will man ihre Vereinigung aber durch Hülfe der Linie finden, so wird man die nämlichen Zahlen finden; denn in einem Ganzen, das 4 Theile hat, findet man auch Halbe; folglich vereinigen sich die Halben und Viertel in einem Ganzen, das 4 gleiche Theile hat. So vereinigen sich Halbe und Fünftel in einem Ganzen, das 10, 20, 30 ꝛc.; Drittel und Viertel in einem Ganzen, das 12, 24 ꝛc. gleiche Theile hat. Halbe, Drittel und Viertel findet man wieder, wie bey den Einheiten, in 12, 24, 36 ꝛc. gleichen Theilen. Soll diese letzte Vereinigung aber durch die Eintheilung gefunden werden, so kann man also verfahren: um Halbe zu erhalten, muß man das Ganze (die Linie) in 2 gleiche Theile theilen; sollen noch Drittel in dem nämlichen Ganzen gefunden werden, so wird jedes Halbe in 3 oder das Ganze in 6 gleiche Theile getheilt; will man in dem nämlichen Ganzen noch Viertel haben, so muß jeder Sechstel wieder in 4 und das Ganze in 24 gleiche Theile getheilt werden. Verfährt man auf diese Weise, so findet man nur die Zahl 24, während dem die Zahlen 12, 36, 48 &c. diesem Bruchverhältnisse, eben wie 24, zu entsprechen geeignet sind. Schon aus diesem geht klar hervor, daß man wohl thut, die Vereinigung der Brüche abwechselnd auch auf die Behandlung der Einheiten zurückzuführen und darauf zu bauen.

Hierauf gestützt, läßt man den Schüler untersuchen, wie viel $1/2$ und $1/3$, oder $1/2$ und $1/4$, oder $1/2$ und $1/5$ zusammen wirklich ausmachen. Für $1/2$ und $1/3$ wird er entweder $5/6$ oder $10/12$ oder $15/18$ &c. finden. Der Schüler weiß, daß sich diese zwey Brüche in den Zahlen 6, 12, 18 &c. vereinigen; diese Zahlen aber jedesmal als ein Ganzes betrachtet, erhält man für die erste Zahl: $1/2 = 3/6$, und $1/3 = 2/6$, zusammen $5/6$; für die zweyte Zahl: $1/2 = 6/12$, $1/3 = 4/12$, zusammen $9/12$ &c.

Würde man den Schüler, auf dieses Fundament gestützt, $2/3$ und $3/4$ zusammenzählen lassen; so fände er ihre Vereinigung wieder in der Zahl 12, 24, 36 &c. Die erste Zahl, 12, genommen, gibt für drey Viertel $9/12$ und für zwey Drittel $8/12$, weil $1/4 = 3/12$ und $3/4 = 9/12$, $1/3 = 4/12$ und $2/8 = 8/12$ sind, welches zusammengenommen $17/12$ oder $1\ 5/12$ ausmacht.

Will man diese Reihenfolgen über die Addition weiter ausdehnen, so kann das, was bey den einfachen Brüchen aufgestellt worden, auch hier als weiterer Leitfaden dienen. Ich verweise daher nur auf die diesfälligen Uebungen und begnüge mich, diesem noch ein paar einzelne Fragen beyzufügen.

Fr. Welches ist die kleinste Zahl, in der sich zwey Brüche vereinigen? Antwort: die Zahl 4. Welches ist die zweytniederste und welches die drittniederste Zahl, in denen sich zwey Brüche vereinigen? Welches ist die niederste Zahl, in der sich dreyerley Arten von Brüchen vereinigen? Antwort: die Zahl 6, die Halbe, Drittel und Sechstel in sich enthält. Welches ist die zweytgeringste Zahl, in welcher sich 3 Brüche vereinigen? Antwort: 8, die Halbe, Viertel und Achtel in sich enthält. Sucht drey verschiedene Arten Brüche auf, die ein Ganzes machen? oder die mehr oder weniger als ein Ganzes betragen? Was für zwey-, drey-, vier- und fünferley Brüche machen immer ein Ganzes? Wie viel werden $^2/_3$ und $^5/_7$ zusammen betragen? Vereinigen sich die verschiedenen Arten Brüche der geraden Zahlen in geraden oder ungeraden Zahlen?

Die gleichen Fragen werden auch über die ungeraden Zahlen gemacht. Vermittelst der Darstellung durch die geraden Linien wird dem Schüler aufgetragen, $^1/_3$, $^1/_4$ und $^1/_5$ zu addiren. Um Drittel zu erhalten, theilt er die Linie in 3 gleiche Theile, sollen in dem gleichen Ganzen noch Viertel seyn, so wird jeder Drittel wieder in 4 und das Ganze in 12 gleiche Theile getheilt; sollen sich aber endlich Fünftel in dem nämlichen Ganzen vereinigen, so wird jeder Zwölftel noch in 5 und das Ganze in 60 gleiche Theile getheilt. Will man dieses noch mehr versinnlicht dargestellt haben, so läßt man die Drittel, Viertel und Fünftel auf der Linie nur durch größere Punkte bezeichnen. Vermöge der Eintheilung der Einheiten weiß der Schüler aber, daß sich die Zahl 60 und 120 auch in 3, 4 und 5 gleiche Theile theilen läßt. $^1/_3 = ^{20}/_{60}$; $^1/_4 = ^{15}/_{60}$ und $^1/_5 = ^{12}/_{60}$ zusammen $^{47}/_{60}$.

Als Kopfrechnungsübung ist es nicht nothwendig, den Schüler mehr als etwa dreyerley Arten Brüche addiren zu lassen.

Subtraction.

Einzelne Fragen mit ein paar Auflösungen sind, wenn man die Addition der Brüche von verschiedener Art als Leitfaden benutzen und befolgen will, hinreichend.

Fr. Wie viel bleibt, wenn man von einem Halben einen Drittel abzieht? Wir wissen, daß Halbe und Drittel sich in der Zahl 6 vereinigen, oder daß man sie in einem Ganzen findet, welches zuerst in 2 und hernach in 3 gleiche Theile getheilt wird.

$^1/_2 = ^3/_6$, $^1/_3 = ^2/_6$; zieht man $^2/_6$ von $^3/_6$ ab, so bleibt noch $^1/_6$.

Wie viel wird bleiben, wenn man $^4/_5$ von $^6/_7$ abzieht? Die Zahl, in welcher sich 7tel und 5tel vereinigen, ist 35 oder 70 ꝛc. $^1/_7 = ^5/_{35}$ und $^6/_7 = ^{30}/_{35}$; $^1/_5 = ^7/_{35}$ und $^4/_5 = ^{28}/_{35}$ und diese von $^{30}/_{35}$ abgezogen, bleiben noch $^2/_{35}$.

Von $^1/_2$ und $^1/_3$ sollen $^2/_5$ abgezogen werden. Die Zahlen, in denen sich Halbe, Drittel und Fünftel vereinigen, seit 30, 60, 90 2c. $^1/_2 = {}^{15}/_{30}$, $^1/_3 = {}^{10}/_{30}$, zusammen $^{25}/_{30}$; $^1/_5 = {}^6/_{30}$ und $^2/_5 = {}^{12}/_{30}$, und diese $^{12}/_{30}$ von $^{25}/_{30}$ abgezogen, bleiben noch $^{13}/_{30}$.

Man soll von einem Bruche zwey andere Brüche verschiedener Art abziehen, so daß nichts mehr bleibt; es fragt sich, was dieses für Brüche seyen? Welche dreyerley Brüche kann man von einem Ganzen abziehen, wenn nichts mehr bleiben soll? oder wenn noch etwas bleiben soll? Gleiche Fragen können auch über gerade und ungerade Zahlen in den Brüchen gemacht werden.

Multiplication.

$^1/_2$ soll durch $^1/_3$ oder $^1/_4$ oder $^1/_5$ multiplizirt werden.

Wie wir früher schon gesehen haben, so heißt multipliziren, den Bruch (hier das Halbe) so oft wiederholen, als der Bruch ein Theil des Ganzen ist.

$^1/_3$ ist der 3te Theil von einem Ganzen, also muß das Halbe $^1/_3$tel mal genommen werden, welches $^1/_6$ beträgt.

Wie viel gibt $^1/_4$ durch $^2/_3$ multiplizirt? Dieses heißt, den Bruch $^1/_4$ so oft wiederholen, als $^2/_3$ Ganze macht. $^2/_3$ ist 2 mal der 3te Theil eines Ganzen; der 3te Theil von $^1/_4$ ist $^1/_{12}$, und 2 mal der dritte Theil ist also $^2/_{12}$.

Daß mit den Brüchen noch Ganze verbunden werden können, fällt gleichsam von selbst aus den frühern Uebungen heraus; z. Ex. es sollen 1 $^1/_2$ mit $^4/_5$ multiplizirt werden, d. h. 1 $^1/_2$ soll so oft wiederholt werden, als $^4/_5$ Theile eines Ganzen sind; $^4/_5$ machen 4 mal den 5ten

Theil eines Ganzen aus, also muß 4 mal der 5te Theil von 1 $^1/_2$ genommen werden; der 5te Theil eines Ganzen ist $^1/_5$ und $^1/_5$ ein halbes mal genommen $^1/_{10}$, dieses aber 4 mal wiederholt, gibt $^4/_5$ und $^4/_{10}$. Die weitere Auflösung ist bey der Addition nachzusehn.

Wie viel giebt 1 $^1/_2$ durch 1 $^1/_2$ multiplizirt? Antwort 2 $^1/_4$; denn dieses heißt, 1 $^1/_2$ so oft wiederholen, als 1 $^1/_2$ Ganze macht, oder 1 $^1/_2$ mal 1 $^1/_2$; einmal 1 $^1/_2$ = 1 $^1/_2$, und der halbe Theil von 1 $^1/_2$ ist $^1/_2$ und $^1/_4$, zusammen nach der Addition weiter fortgesetzt 2 $^1/_4$.

Kann man $^1/_2$ mit jedem Bruche multipliziren? Wenn man einen Bruch mit einem Bruche multiplizirt, kann es ein Ganzes geben? Wenn man ein Halbes mit einem Halben multiplizirt, wie viel wird es geben? Ist die erhaltene Zahl aus Quadratzahlen zusammengesetzt? Die Antwort wird seyn, daß 1 und 4 Quadratzahlen sind. Auch über gerade und ungerade Zahlen können ähnliche Fragen gemacht werden.

Division.

Fr. Wie viel gibt $^1/_2$ durch $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ 2c. dividirt?

Wie wir bey den einfachen Brüchen gesehen haben, so heißt dieses untersuchen, wie oft $^1/_3$ in $^1/_2$ enthalten sey, und um dieses zu bestimmen, muß man zuerst sehen, in welcher Zahl sich die Halbe und Drittel wieder vereinigen, welches in den Sechsteln, Zwölfteln 2c. geschieht; $^1/_2 = {}^3/_6$ und $^1/_3 = {}^2/_6$, die $^2/_6$ sind in $^3/_6$ einmal enthalten, und es bleibt noch $^1/_6$ übrig, welcher von den $^2/_6$, mit denen dividirt wurde, die Hälfte ist. Also gibt es 1 $^1/_2$.

Wie viel wird 1 $^1/_2$ durch $^2/_7$ dividirt geben? Um diese Aufgabe zu lösen, werden die Halben und Siebentel in gleiche Theile verwandelt und das Ganze auch in die nämlichen Theile aufgelöst.

Wie viel werden 2 $^1/_2$ durch 1 $^2/_9$ dividirt geben? Welche Brüche sind in einem Zehntel enthalten? Welche sind aber darin enthalten, so daß nichts mehr bleibt?

Wie wir bereits bey den einfachen Brüchen gesehen haben, so ist es sehr wesentlich, daß die Division neben der Multiplication wenigstens in einigen Beyspielen aufgeführt werde. Hier ist dieses doppelt wichtig und deßwegen belege ich es mit ein paar Beyspielen.

Fr. Seht, wie viel $^1/_2$ mit einem Drittel dividirt gebe? und hernach, wie viel das Halbe durch einen Drittel multiplizirt gebe? Entsteht durch die Multiplication oder durch die Division eine größere Zahl? Kann man jeden Bruch mit einem andern multipliziren und hinwieder dividiren? Wenn man $^1/_2$ durch $^1/_3$ multiplizirt und das Herausgekommene durch $^1/_3$ dividirt, wie viel wird es geben? Antwort: $^1/_2$. Die nämliche Frage umgekehrt.

Es ist nicht nöthig zu bemerken, daß die Division auch mit der Addition und Subtraction auf die nämliche Weise verbunden werden könnte. Diese Verbindungen sind auf der gegenwärtigen Stufe von keiner Wichtigkeit mehr; sie können aber, in so fern es der Erzieher für seine Schüler nothwendig erachten sollte, gewiß mit der größten Leichtigkeit gemacht werden. Eben so wird man wahrnehmen, daß bey den Brüchen verschiedener Art beynahe keine Reihenfolgen mehr aufgestellt werden. Der Grund dieser Abänderung kann dem nähern Prüfer dieses Ganges nicht verborgen bleiben; weil es aber nicht jeder vom gleichen Standpunkt aus erklären könnte; so erlaube ich mir nur folgende Bemerkung: So wie die sinnliche und äußere Anschauung im Kinde in die innere und geistige übergeht, so muß nach und nach alles verschwinden, was vorzüglich geschickt und geeignet ist, der Sinnenthätigkeit zu dienen, und hinwieder muß vorzüglich dem Einfluß eingeräumt werden, was die Geistesthätigkeit zu befördern geschickt ist. Ich fahre in den positiven Uebungen zu diesem Ziele weiter.

Arithmetische Vergleichung mit doppelten Brüchen.

Untersucht, um wie viel $1/2$ mehr ist als $1/3$, $1/4$, $1/5$ rc.? Hernach, um wie viel $1/10$ weniger ist als $1/9$, $1/8$, $1/7$ rc.? Ferner, was der Unterschied zwischen $1/2$ und $1/3$, oder $1/2$ und $1/4$ rc. ist?

Um dieses zu finden, verwandelt man die Brüche wieder, wie bey der Addition, in Brüche, die einerley Größe haben und verfährt dann weiter, wie bey den Brüchen einerley Art. Auch können die dort aufgestellten Beyspiele, wie bey den Einheiten, als spätere Norm dienen.

Geometrische Vergleichung mit Brüchen.

Fr. $1/2$ ist $2/3$ von welcher Zahl? und umgekehrt: wie viel sind $2/3$ von $1/2$? — Auflösung: Soll $1/2$ zweymal der dritte Theil von einer Zahl seyn; so muß das Halbe 2 Theile haben, wie die zu suchende Zahl deren 3 hat. Ein Halbes in 3 gleiche Theile getheilt, gibt für einen Theil $1/4$, und die zu suchende Zahl hat 3 solcher Theile oder $^3/_4$. Um aber $^2/_3$ von $^1/_2$ zu nehmen, muß man zuerst den 3ten Theil von einem Halben haben, welches $^1/_6$ ist und dieses 2 mal genommen, gibt $^2/_6$.

$^1/_2$ ist $^3/_4$ von $^3/_{11}$ von welcher Zahl? Wie viel ist $^7/_8$ von $^2/_3$ von $^1/_2$? Um diese letzte Aufgabe zu lösen, muß man bey den Halben anfangen; $^2/_3$ von $^1/_2$ sind $^2/_6$, und $^7/_8$ von $^2/_6$ werden auf die gewöhnliche Weise genommen.

$^1/_3$ verhält sich zu $^1/_2$, wie $^1/_4$ zu welcher Zahl? Um diese Aufgabe zu lösen, sucht man zuerst das Verhältniß des Drittels zum Halben und vereinigt diese Brüche in einerley Art; dieses gibt $^2/_6$ zu $^3/_6$ oder im Verhältniß von 2 zu 3; also muß $^1/_4$ auch 2 Theile haben, wie die zu suchende Zahl deren 3 hat. $^1/_4$ hat $^2/_8$; demnach verhält sich $^1/_3$ zu $^1/_2$, wie $^1/_4$ zu $^3/_8$.

Die weitern Beyspiele bitte ich bey den Einheiten und einfachen Brüchen nachzusehn.

Aus diesem Gange geht klar hervor, daß die nämlichen Verbindungen, die ich bey den Einheiten so umständlich erörterte, auch bey den doppelten Brüchen ihre Anwendung haben, welches immerhin als Uebung und Abwechselung am Ende der Darstellung derselben noch eine Stelle einnehmen mag. Als Leitfaden kann man diesfalls nur das benutzen, was ich bey den Einheiten sehr umständlich zeigte und ausführte. Jeder Schüler ist ohne große Nachhülfe des Lehrers im Stande, ganz die gleichen Fragen auch auf die Brüche von verschiedener Art anzuwenden. So zeigte ich bey den doppelten Brüchen die Wichtigkeit, die Multiplication neben die Division zu setzen; es ist aber auch nicht unwichtig, wenn man die Multiplication mit der Addition und die Division mit der Subtraction, und auch umgekehrt, in einigen Beyspielen verbindet, und diese Verbindung eben so auf die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse ausdehnt.

Aus dieser einfachen Darlegung wird heiter, wie die sinnliche Anschauung ihren Einfluß auf dieser Stufe bereits aufgegeben hat. Diese Uebungen müssen daher hier einen ganz andern Charakter annehmen, und auch in Hinsicht des Zeitaufwands wird für sie eine bedeutende Ersparung eintreten, wenn die Anfangsübungen in ihrer ganzen Vollendung gegeben worden sind. Da wo immer außer den einzelnen Fragen noch Reihenfolgen bey den Brüchen statt finden, können die Resultate jedesmal mit Ziffern auf der Schiefertafel, wie ich früher angegeben, dargestellt werden. In keinem Fall aber darf bey den spätern Uebungen weiter ein Anschauungstypus zu Hülfe gezogen werden. Eine vorzügliche Uebung wird hier folgende seyn. Nachdem der Schüler die Einheiten, die einfachen und doppelten Brüche beendigt hat, kann er, bevor er weiter schreitet, noch einmal eine kurze Wiederholung von alle diesem vornehmen. Man wird mir zwar einwenden wollen, nachdem ein Schüler mit den schwierigen und spätern Uebungen vertraut und bekannt sey, sehe man die Nothwendigkeit von einer nochmaligen Wiederholung derselben gar nicht ein. Die Einwendung zu entkräften, mag folgendes dienen: In jeder einzelnen Uebung wird gleichsam die ganze Kraft und Thätigkeit des Schülers auf dieselbe gerichtet und das Ganze aus den Augen verloren, und also nur eine einseitige, aber sehr gesteigerte Geistesthätigkeit gebildet werden, so daß der Schüler im beständigen Vorschreiten oft mit dem Einfachern und Leichtern nicht mehr so vertraut und bekannt ist, wie mit dem Verwickeltesten und Schwersten.

Bevor ich in der Darlegung der Zahlverhältnisse weiterschreite, glaube ich einige Bemerkungen über die zuerst erschienenen Elementarbücher, die Zahlverhältnisse betreffend, nicht unterdrücken zu dürfen, wenn ich diesen Unterrichtszweig umfassend behandeln will.

Schon aus obiger Darlegung geht klar hervor, wie sehr die ersten Elementarbücher lückenvoll und unvollendet gewesen seyn müssen. Aber worin sich die gegenwärtige Darlegung der Zahlverhältnisse von der frühern unterscheidet, muß hier näher erörtert werden, wenn keine Art von Undeutlichkeit mehr statt finden soll. Dem Schüler auf einmal eine Tabelle zu zeigen, die 10 mal 1, 10 mal 2 bis 10 mal 10 Linien oder Striche, Punkte ꝛc. enthält, ferner eine zweyte Tabelle für die einfachen Brüche, die 10 einzelne Quadrate, hernach 10 Quadrate, wovon jedes halbirt und so weiters bis zu 10 Quadraten, wovon jedes in 10 gleiche Theile getheilt ist, darstellt, und endlich eine dritte Tabelle für die doppelten Brüche, die auf die nämliche Art, wie die Tabelle der einfachen Brüche einfach, doppelt getheilt ist, ist nicht geeignet, sein Anschauungsvermögen zu entwickeln, was doch im Anfange so nothwendig ist und erzielt werden muß. Die Ausdehnung der Anschauungsgegenstände soll eine Folge der Entwickelung der Anschauungskraft seyn, die von dem Einfachen ausgeht und lückenlos zu dem Verwickeltern fortschreitet. Das was wir in diesen Tabellen vor uns sehen, wäre das letzte, was man diesfalls dem Schüler vorlegen dürfte. Es dürfen daher auf keinen Fall diese Tabellen dem Schüler im Anfange vor seine Sinne gebracht werden. Mit diesem will ich aber ganz und gar nicht behaupten, daß alle Arten von Tabellen für den Rechnungsunterricht aus der Schule verschwinden müssen; im Gegentheil, das was das Kind selbst durch sinnliche Darstellung hervorgebracht hat, sollte auch als Tabelle in seinem Schulzimmer aufbewahrt bleiben, und in der allfälligen Wiederholung sollte nicht wieder von Neuem gemacht werden müssen, was früher schon von ihm erzeugt und durch dasselbe angeschaut und aufgefaßt worden ist. Die Uebungen des Kindes, besonders seine Schul- und Wohnzimmer, mit Anschauungsgegenständen anzufüllen, die bildend für es wären, ist immer noch nicht beherzigt worden. Die Zahl-, Form- und Größenlehre würde hiefür wichtige Gegenstände der Anschauung liefern. Einseitig und mangelhaft sind ferner die ausgedehnten Reihenfolgen von Zahlverhältnissen, die in diesen früher erschienenen Elementarbüchern schon für die ersten Anfangsübungen aufgestellt wurden. Dieser Gang führt unstreitig dahin, daß an die Stelle der Entwickelung der Geisteskräfte ein Mechanismus tritt, der dem was man durch diesen Unterricht zu erzielen und zu suchen hat, sehr nachtheilig wird. Am meisten aber spricht sich die Mangelhaftigkeit der ersten Elementarbücher dadurch aus, daß außer der geometrischen Vergleichung der Zahl gleichsam gar keine Uebungen in denselben sich finden, die das Wesen der Zahlverhältnisse zu erschöpfen geeignet sind. Eine Totalabänderung hierin ist eine der ersten Forderungen, die erfüllt werden muß, wenn die Zahl als Typus der geistigen Entwickelung des Kindes benutzt werden soll. So sehr auch damals auf Anschauung gedrungen wurde, so entspricht ein Sinn, das Auge allein dem was durch die Anschauung geleistet werden muß und geleistet werden kann, ganz und gar nicht. Eine genugthuende und wahre Anschauung ruht also auf der Totalthätigkeit aller Sinne, und diese mangelt in den ersten Elementarbüchern so ganz, daß diese eigentlich im Widerspruche mit dem stehen, was ich damals mir von der Anschauung für den Elementarunterricht schon versprach und bis auf einen gewissen Punkt auch richtig voraussah und voraus sagte. Aber die Mittel, dieses zu verwirklichen, mangelten ganz.

Ich hoffe, so viel sey hinreichend, um die zuerst erschienenen Elementarbücher in ein richtiges und wahres Verhältniß mit dem zu setzen, was ich gegenwärtig über den nämlichen Gegenstand darzulegen mich bemühe.

Ich setze die Zahlenlehre weiter fort.

Der oben aufgestellte Cursus fängt mit der Schulfähigkeit des Kindes oder mit seinem 6ten bis 7ten Jahre an; er wird bey gehöriger Vorbereitung durch das häusliche Leben im 8ten oder höchstens im 9ten Jahre vollendet, und diesem Umstand muß gehörig Rechnung getragen werden. (Das Mädchen ist in der Regel im 6ten Jahre hiefür so reif als der Knabe im 7ten). Bey dem Eintritt des Kindes in's Alter der Schulfähigkeit, wird man sowohl in der Schule als auch im häuslichen Leben sehr unzweckmässig und gegen die Natur handeln, wenn man im

Anfange eine ganze Stunde auf irgend ein Unterrichtsfach verwendet. Eine halbe Stunde des Tages reicht hin. Diese darf aber nach und nach bis auf eine Stunde verlängert werden. Mehr als eine Stunde täglich soll in keinem Fall auf dieses Unterrichtsfach, so lange es als Entwickelung der Geisteskräfte benutzt wird, verwendet werden. Bey dem Vorrücken des Alters muß aber, wie wir später sehen werden, auch die Zeit, die auf das eine oder andere Fach verwendet wird, noch über eine Stunde ausgedehnt werden. Will man die Zahl als Typus der geistigen Entwickelung des Kindes im Einklange mit dem Zifferrechnen behandeln; so wird eine nähere Erörterung und Bestimmung der Art und Weise, wie auch dieses Fach ohne Lücken und naturgemäß hier angeknüpft und auf das Dargelegte gebaut werden müsse, erfordert.

So wie beym Schüler das, was in gegenwärtiger Schrift über die Einheiten aufgestellt worden, vollendet ist; kann auch mit dem Zifferrechnen nach folgendem Zeit maßstabe angefangen werden. Wird täglich eine halbe Stunde für das Kopfrechnen verwandt; so können für das Zifferrechnen in der Woche etwa zwey Stunden benutzt werden. Die Kenntniß und Behandlung der Ziffer ist das erste, das für diesen Endzweck vom Kinde gelernt werden muß. Die hiefür passenden Reihenfolgen sind folgende:

Neben einen, 2, 3, 4 ꝛc. bis 9 Striche, die der Lehrer auf eine große Tafel zeichnet, setzt er die gewöhnlichen Zifferreihen, und sagt dem Schüler, daß diese Zeichen eben so viel als die jedesmal neben denselben stehenden Striche bedeuten. Kennt der Schüler die Ziffern von 1 bis 9, so fährt der Lehrer weiter und sagt: um 10 durch ein ähnliches Kunstzeichen auszudrücken, bedient man sich eines Zeichens, das man Null heißt. Dann läßt der Lehrer den Schüler rechts neben jede der so eben aufgestellten Ziffern eine Null setzen und sagt zu ihm, daß das so bezeichnete Eins statt eines Einers einen Zehner, das so bezeichnete Zwey statt 2 Einer 2 Zehner bedeute u. s. w. Er fährt fort und sagt zu ihm: wollen wir 10 Zehner ausdrücken, so fangen wir von vorne an und setzen neben die als zehn Einer bezeichnete Zahl wiederum eine Null, dann bedeutet sie 10 Zehner oder einen Hunderter. Bey 2 Zehnern wird das Gleiche gethan, und statt 2 Zehner giebt es 2 Hunderter, bey 3 Zehnern giebt es aber durch die Hinzusetzung einer Null rechts 3 Hunderter statt 3 Zehner; dieses läßt der Lehrer wieder bis zu 9 Hunderten fortsetzen. Dann wird wieder von vorne angefangen und zu den Hunderten wieder eine Null rechts gesetzt, und es entstehen dadurch 10 Hunderter oder ein Tausender. Bey 2 Hundertern ebenfalls wieder eine Null rechts hinzugefügt giebt 2 Tausender. Auch dieses wird bis zu 9 Tausendern fortgesetzt. Auf die gleiche Weise läßt man den Schüler noch einmal bey der Ziffer eins anfangen, zum Tausender noch einmal rechts eine Null hinzusetzen, und statt eines Tausenders erhält er einen Zehntausender; das Gleiche geschieht, um 3, 4, 5 rc. Zehntausender zu erhalten. Weiter als auf den Zehntausender dieses ausdehnen zu wollen, wäre hier noch zu frühe. Diese Uebung muß daher hier eingestellt und zu folgenden geschritten werden.

Der Lehrer schreibt auf seine große Wandtafel bald 9 Zehner, bald 9 Hunderter, oder 9 Einer, oder 9 Zehntausender, und läßt sie zusammen und einzeln, wie beym Kopfrechnen, aussprechen, wie viel diese Zeichen jedesmal bedeuten. Ist den Schülern die Kenntniß der Ziffern ganz geläufig, so wird zu Folgendem geschritten:

Lehrer: Wir wollen jetzt versuchen, eilf durch Kunstzeichen auszudrücken. Eilf ist ein Zehner und ein Einer; der Zehner wird auf obige Weise bezeichnet und statt der Anhängung der Null setzt man die Einheit an ihren Platz. Zwölf ist ein Zehner und 2 Einer; die 2 Einer werden mit dem Zeichen 2 an die Stelle der Null gesetzt ꝛc. Dieses wird bis zu 19 fortgesetzt. Nach diesem von der Zahl 10 bis 19 befolgten Bezeichnungsgange der Ziffern wird der Schüler auch die Zahlen von 20 bis 29 schreiben und bezeichnen können, und eben so wird mit der größten Leichtigkeit die Bezeichnung der Zahlen bis auf 99 fortgesetzt. Gestützt auf diese Grundlage kann man den Schüler versuchen lassen, auch Hundert und Eins zu bezeichnen. Sollte er aber diese Schwierigkeiten noch nicht überwinden; so kann ihm der Lehrer dieses also erleichtern: 101 ist 1 Hunderter und 1 Einer; 1 Hunderter wird mit 1 und zwey Nullen rechts bezeichnet; weil aber in 101 sich noch ein Eins befindet, so läßt man die 2te Null rechts weg und setzt ein Eins an ihre Stelle. Bey dieser einzigen Nachhülfe soll er aber im Stande seyn, dieses bis auf 109 ohne weitere Anleitung fortzusetzen. Wird dem Schüler aufgetragen, 110 durch Ziffern zu bezeichnen, so macht man ihn darauf aufmerksam, daß dieses ein Hunderter sey, der auf die gewöhnliche Weise bezeichnet werde, ferner ein Zehner, und deßhalb statt der ersten Null rechts gestellt werden müsse. Ist der Schüler in der Kunstbezeichnung der Zahlen durch Ziffern einmal so weit geführt, so wird er bey stufenweiser Befolgung dieses Ganges mit der größten Leichtigkeit jede Zahl bis auf 1000 und noch weiter zu bezeichnen sich im Stande fühlen und dieses auch ohne irgend eine Handbietung oder Anleitung des Lehrers ausführen können. Bevor aber in den dießfälligen Uebungen weiter geschritten werden darf, muß eine genugthuende Prüfung über das Aufgestellte statt finden. Der Lehrer schreibt mit Ziffern beliebige Zahlen auf seine Wandtafel und läßt dieselben den Schüler aussprechen; auch wechselt er ab und giebt ihm beliebige Zahlen zum Aufschreiben auf seiner eigenen Schiefertafel auf. So lange er nicht mit großer Leichtigkeit jede Zahl wenigstens bis auf 1000 richtig zu schreiben im Stande ist, darf nicht weiter geschritten werden. Ist aber dieses erzielt, so sind folgende Uebungen als Ergänzung und Vollendung der Kenntniß der Ziffer anzusehen, und dann darf ohne Gefahr weiter geschritten werden. Der Lehrer schreibt die Zahl 2222 auf seine Wandtafel und läßt sie den Schüler aussprechen. Zwey in der 1sten Stelle rechts bezeichnet 2 Einheiten, in der 2ten 2 Zehner, in der 3ten 2 Hunderter, in der 4ten aber 2 Tausender. Oder, 2 in der 2ten Stelle drückt wie oft so viel aus als 2 in der ersten? 2 in der 3ten Stelle drückt wie oft so viel aus als 2 in der 2ten? 2 in der 4ten Stelle drückt wie oft so viel aus als 2 in der 3ten? Ferner, 2 in der 3ten Stelle drückt wie oft so viel aus, als 2 in der

1sten Stelle? 2 in der 4ten Stelle drückt wie oft so viel aus als 2 in der 2ten Stelle? Endlich aber kann man 2 in der 3ten Stelle eben so mit 2 in der 1sten, 2ten und 4ten Stelle nach einander vergleichen lassen. Statt einer Zahl, die einerley Ziffern hat, kann auch eine Zahl, die Ziffern von verschiedener Art, oder können auch solche, die Nullen in sich fassen, genommen werden. Die Ausführung ist der obigen ganz ähnlich. Um aber dem Lehrer gleich im Anfange mit hinlänglichem Stoff für seinen Zweck an die Hand zu gehn, mag hier noch ein Exempel Platz finden. Ich setze 4965 und frage: wie viel drückt 5 in der 1sten, 6 in der 2ten, 9 in der 3ten und 4 in der 4ten Stelle aus? Wie oft drückt 6 in der 2ten Stelle so viel aus als 5 in der 1sten? und so weiter mit der dritten und 4ten Stelle. Wird der Schüler Fragen dieser Art mit Leichtigkeit beantworten können, so ist er hinlänglich vorbereitet, den Anfang mit der Addition wirklich machen zu können.

Addition.

Der Lehrer giebt dem Schüler auf, 4444 und 5555 zusammenzuzählen? (Es versteht sich, daß diese Aufgaben diktirt und nicht vom Lehrer auf seiner Tafel vorgeschrieben werden dürfen.) Ohne daß der Schüler die Ziffern unter der gewohnten Additionsform unter einander setzt, wird er im Zusammenzählen dennoch die Tausender zu den Tausendern, die Hunderter zu den Hundertern rc. zählen. Fordert man von ihm, er möchte die Ziffern aber auch so setzen, daß sie in Uebereinstimmung mit dem kommen, was in seinem Kopfe vorgehe, so ist leicht möglich, daß er sie auf die gewöhnliche Weise über einander setzt. Ist dieses aber nicht der Fall; so macht man ihn etwa auf folgende Art darauf aufmerksam. Wie viel werden 3749 und 2647 mit einander geben? Um diese zwey Zahlen zusammenzuzählen, fordert der Lehrer den Schüler auf, er möchte die 2te Zahl so setzen, daß die Einer unter die Einer der ersten Zahl und eben so die Zehner unter die Zehner, die Hunderter unter die Hunderter und die Tausender unter die Tausender zu stehen kommen; zählt zuerst die Einer, hernach die Zehner, dann die Hunderter und endlich die Tausender zusammen. Das Resultat wird seyn, daß es 16 Einer, 8 Zehner, 13 Hunderter und endlich 5 Tausender giebt. Dieses alles läßt man den Schüler durch Hülfe der Nullen auch wirklich schreiben und fährt denn also weiter: die 16 Einer geben aber wie viele Zehner? Antwort: einen, und 8 Zehner haben wir schon, also sind es zusammen 9 Zehner und 6 Einer. Dreyzehn Hunderter geben wie viele Tausender? Die Antwort wird seyn: 1 Tausender, und es bleiben noch 3 Hunderter. Diesen Tausender zu den 5 Tausendern gezählt, giebt 6 Tausender; in allem 6 Tausender, 3 Hunderter, 9 Zehner und 6 Einer oder 6396. Um dem Schüler die Nothwendigkeit dieser Verfahrungsweise anschaulich zu machen, könnte man ihn dieses, statt von der Rechten zur Linken, auch von der Linken zur Rechten versuchen lassen, welches aber die Schwierigkeiten nur unnöthigerweise erhöhen würde und hinderlich wäre, den Schüler schnell auf den besten Weg zu führen. Der Lehrer giebt zur Verdeutlichung noch folgendes Beyspiel: 9694 und 3799 sollen zusammengezählt werden. Setzet diese Zahlen wieder so, daß die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner ꝛc. zu stehen kommen; fangt hernach auf der rechten Seite also an: 9 Einer und 4 Einer geben 13 Einer, 13 Einer machen 1 Zehner und 3 Einer, die 3 Einer setzt in die Einer = oder erste Stelle rechts, und den Zehner behaltet zu dem folgenden Zehnern. Ein Zehner behalten und 9 Zehner und 9 Zehner geben 19 Zehner, 19 Zehner machen 1 Hunderter und 9 Zehner; die 9 Zehner setze ich in die Zehnerstelle und behalte 1 Hunderter. Einen Hunderter behalten und 7 und 6 Hunderter geben 14 Hunderter; die 14 Hunderter machen 1 Tausender und 4 Hunderter; die 4 Hunderter setze ich in die Hunderterstelle und einen Tausender behalte ich zu den folgenden Tausendern. Einen Tausender behalten und 3 und 9 Tausender machen 13 Tausender; 13 Tausender sind 1 Zehntausender und 3 Eintausender; die Eintausender setze ich in die Tausenderstelle und den Zehntausender an seine Stelle, die die 5te Stelle links ist. Hat man eine zahlreiche Klasse, so läßt man, wie beym Kopfrechnen, die Schüler bald alle zusammen, bald die schwächern, bald aber die stärkern und bald jeden einzeln sprechen. Ich darf über diesen Punkt nur auf alle das verweisen, was ich diesfalls schon an verschiedenen Stellen in ein heiteres Licht zu setzen suchte. Eben so werden, statt nur 2 Zahlen 3, 4, 5 Zahlen ꝛc. zum Addiren gegeben. Es soll addirt werden:

a) 4564
b) 306
c) 9460
d) 64

e) 14394.

Nachdem man dem Schüler ähnliche Additionsbeyspiele gegeben hat und er hinlänglich darin geübt worden ist, können noch folgende Fragen an ihn gerichtet werden: die mit a, b, c und d bezeichneten Zahlen sind welcher Zahl gleich? Die Antwort wird seyn, der Zahl, die mit e bezeichnet ist. Und umgekehrt: welchen Zahlen ist e gleich? Welche Zahlen muß man zu denjenigen, die mit a und b bezeichnet sind, hinzusetzen, wenn man die mit e bezeichnete Zahl erhalten will? Eine weitere Ausdehnung dieser Fragen ist sogar für den Schüler nicht mehr zu schwierig; dieser kann daher zu Zeiten auch die Stelle des Lehrers übernehmen. Doch wie und auf welche Weise dieses geschehen müsse, habe ich an Ort und Stelle genugsam erörtert. Ich schreite in dem, was ich noch weiter zu sagen habe, vorwärts.

So wichtig die Norm auch ist, unter der die Addition hier aufgestellt wurde, so ist sie nichts weniger als die einzige, die angewandt werden darf, um diesen Theil der Zahlenlehre mit Lebendigkeit zu behandeln. Die eben aufgestellte Norm ist sehr geeignet, im Kinde deutliche und richtige Begriffe zu erzeugen; aber es kann dadurch in diesem Unterrichtsfache weder Schnelligkeit noch mechanische Fertigkeit erlangen. Deswegen müssen für die Erreichung dieses Endzwecks noch einige Uebungen statt finden. So wie man beym Kinde der deutlichen Begriffe sicher ist, könnte man folgende Uebung mit ihm vornehmen. Es werden ihm wieder 2, 3, 4 ꝛc. Zahlen, die über tausend betragen, zum addiren mit dem Beysatze aufgetragen, er möchte dieses jetzt so schnell ausführen, als es ihm immer möglich sey. Der Schüler wird zwar anfangs jedesmal wieder die Worte Einer, Zehner, Hunderter und Tausender gebrauchen, nach und nach wird er, aber ohne daß man nothwendig hat, ihn hierauf aufmerksam zu machen, diese Worte, die den innern Werth jeder Ziffer bezeichnen, ganz weglassen und die Addition so behandeln, wie wenn die Ziffer in allen Stellen eine und die gleiche Bedeutung hätte. Die Abstraction tritt hier an die Stelle der Anschauung. So wie das Kind im Anfange des Zählenlernens die Zahl nicht von dem Gegenstand trennte; so ist es auch unvermerkt und nach und nach dahin gekommen, diese Trennung ohne weitere Hülfe des Lehrers zu erzielen. So sagt er zuerst: ein Apfel, zwey Aepfel ꝛc., hernach eins, zwey ꝛc.; und eben so wird es auf dieser Stufe auch nicht mehr sagen: 3 Einer oder Zehner ꝛc., und 4 Einer, Zehner ꝛc. machen 7 Einer, Zehner u. s. w., sondern nur schlechtweg, 3 und 4 sind 7. Dieses ist aber nicht nur bey der Addition, sondern in allen Zahloperationen mit den Ziffern wahr. Die Subtraction, Multiplication ꝛc. muß ebenso, wie die Addition, durch die Weglassung der Benennung der Stellen, in der die Ziffern stehen, enden. Der Mechanismus ist also das letzte, das erzielt werden darf, wenn man nicht gegen den Gang, den die Natur befolgt, handeln will.

Subtraction.

Der Lehrer gibt dem Schüler wieder, wie bey der Addition, auf, etwa 4444 von 9999 abzuziehen.

Nachdem die Addition auf die jetzt bekannte Weise behandelt worden, unterliegt es keinem Zweifel mehr, daß der Schüler die Zahlen ebenso, wie bey der Addition, unter einander setzen und also diese Aufgabe auf folgende Weise lösen wird: 4 Einer von 9 Einern abgezogen oder weggethan, bleiben 5 Einer; 4 Zehner von 9 Zehnern weggethan, bleiben 5 Zehner u. s. w.

Eine zweyte Aufgabe:

Von 9112 soll man 5984 abziehen. — Da dieses vom Schüler wieder sehr mannigfaltig gelöst und ausgeführt werden kann; so wird man wohl thun, ihn gleich im Anfange auf folgende Verfahrungsart aufmerksam zu machen: 4 Einer von 2 Einern können nicht abgezogen werden; um dieses zu thun können, wollen wir 1 Zehner von der folgenden Stelle borgen; 1 Zehner oder 10 Einer mit den 2 Einern, die wir in der Einerstelle schon haben, machen 12 Einer, 4 Einer von 12 Einern abgezogen, bleiben 8 Einer; 8 Zehner von keinem Zehner, denn der Zehner in der Zehnerstelle ist geborgt worden, können wieder nicht abgezogen werden; also wollen wir einen Hunderter von der folgenden Stelle, welcher 10 Zehner ausmacht, borgen; 8 Zehner von 10 Zehnern abgezogen, bleiben noch 2 Zehner. In der folgenden Stelle erhält man auf diesem Wege 9 Hunderter von 10 Hundertern abzuziehen, und es bleibt noch 1 Hunderter; 5 Tausender aber endlich von 8 Tausendern abgezogen, bleiben noch 3 Tausender ꝛc.

Eine dritte Aufgabe:

Von 8000 sollen 5673 abgezogen werden.

Bey einer solchen Führung kann der Schüler jetzt versuchen, ob er diese Aufgabe ohne weitere Hülfe zu lösen im Stande sey. Kann er sie allenfalls noch nicht lösen, so führt der Lehrer ihn unter folgender Handbietung dazu: 3 Einer können von keinem Einer nicht abgezogen werden. Da sich aber kein Zehner und kein Hunderter in der Zahl befinden, von der abgezogen werden soll, so kann auch keiner geborgt werden, wohl aber ein Tausender, der 10 Hunderter hat. Von den 10 Hundertern wollen wir einen Hunderter borgen, der 10 Zehner hat, und endlich von den 10 Zehnern einen Zehner nehmen, der 10 Einer hat. Drey Einer von 10 Einern abgezogen, bleiben 7 Einer; 7 Zehner von den 9 Zehnern, die wir in der Zehnerstelle zurückgelassen haben, abgezogen, bleiben 2 Zehner; 6 Hunderter von den 9 Hundertern, die wir ebenfalls in der Hunderterstelle gelassen haben, abgezogen, bleiben 3 Hunderter; 5 Tausender von den 7 Tausendern (denn wir haben einen Tausender geborgt) abgezogen, bleiben noch 2 Tausender.

Sind dem Schüler ähnliche Auflösungen ganz geläufig und klar; so wird, wie bey der Addition, zu Aufgaben geschritten, die keinen andern Zweck mehr haben können, als die mechanischen Fertigkeiten zu eben dem Grad zu erheben, wie durch gegenwärtige Uebungen die Einsicht und Klarheit dieser Ziffer- und Zahloperation begründet und befördert worden ist. Damit der Lehrer wisse, wie viel Zeit bey einer gehörigen Vorbereitung und Begründung allenfalls auf eine solche Uebung verwendet werden dürfe, so füge ich dem, was ich hinlänglich erörtert zu haben glaube, noch bey: Auf keinen Fall sollte der Schüler mehr als etwa eine oder zwey, höchstens drey Stunden Zeit auf die Addition oder Subtraction verwenden. Allenfalls folgende Beyspiele dürfen, bevor man zu einer andern Zahloperation schreitet, noch eine Stelle finden:

a)	8000
b)	5673
c)	2327.

Welchen Zahlen ist die mit a bezeichnete Zahl gleich? Antwort: den Zahlen, die mit b und c bezeichnet sind. Aus welchen Gründen ist diese Zahl jedesmal den zwey andern gleich? Indem b gerade um das was c ausdrückt, weniger ist als a, so machen die zwey folgenden Zahlen immer so viel aus als die erste.

Multiplication.

4934 soll mit 8 multiplicirt oder 8 mal genommen werden.

Ist der Zögling durch die Kopfrechnungsübungen noch nicht zu dem Kunstausdruck „Multiplication" geführt worden, so muß er hier auch nicht gebraucht werden. Es unterliegt keinem Zweifel, daß der Schüler diese Zahl 8 mal unter einander setzen, und nachdem dieses geschehen ist, sie endlich zusammenzählen wird. Auch ist dieses mit den frühern Uebungen des Zifferrechnens in vollkommenem Einklange. Indem der Lehrer diese Verfahrungsart ganz billigt, ermangelt er nicht, seinen Schülern zu bemerken, wie unanwendbar dieses wäre, wenn man hundert und noch mehrmal eine Zahl wiederholen müßte. Daher macht er sie auf folgende Weise auf eine andere Auflösung aufmerksam. Um 4934 achtmal zu wiederholen, wollen wir zuerst 4 Einer, hernach 3 Zehner, dann 9 Hunderter und endlich 4 Tausender jedesmal 8 mal wiederholen. Acht mal 4 Einer machen 32 Einer, oder 2 Einer und 3 Zehner, die 2 Einer setzen wir in die Einerstelle und 3 Zehner behalten wie für die Zehnerstelle; 8 mal 3 Zehner sind 24 Zehner, und 3 Zehner, die behalten worden, geben 27 Zehner, 27 Zehner sind 2 Hunderter und 7 Zehner, die 7 Zehner werden in die Zehnerstelle gesetzt und die 2 Hunderter für die Hunderterstelle aufbehalten; 8 mal 9 Hunderter sind 72 Hunderter, und 2 Hunderter behalten, sind 74 Hunderter oder 7 Tausender und 4 Hunderter, die 4 Hunderter werden in die Hunderterstelle gesetzt und 7 Tausender für die folgende Stelle aufbehalten; 8 mal 4 Tausender geben 32 Tausender und 7 Tausender aufbehalten, 39 Tausender oder 3 Zehntausender und 9 Eintausender; die 9 Tausender setzt man in die Tausenderstelle und die 3 Zehntausender um eine Stelle weiter links oder in die 5te Stelle.

Wäre aber in obiger Aufgabe statt 4934 die Zahl 4030 durch 8 zu multipliciren, so müßte wieder auf die gleiche Weise verfahren werden. Man würde den Schüler aussprechen lassen, daß er 8 mal keinen Einer, 8 mal 3 Zehner, 8 mal keinen Hunderter und 8 mal 4 Tausender zu nehmen habe. In der wirklichen Ausführung würde es dann heißen: 8 mal keinen Einer giebt kei=

nen Einer, und um anzuzeigen, daß es keinen Einer in der Einerstelle habe, setzt man in dieselbe eine Null; 8 mal 3 Zehner machen 24 Zehner, oder 2 Hunderter, die für die Hunderterstelle aufbehalten, und 4 Zehner, die in die Zehnerstelle gesetzt werden; acht mal keinen Hunderter giebt keinen Hunderter, die zwey Hunderter, die behalten worden, werden aber in die Hunderterstelle gesetzt u. s. w.

2222 sollen 10 mal genommen oder mit 10 multiplicirt werden, es fragt sich, wie viel dieses gebe? Auch hier wird im Anfange ganz auf obige Weise verfahren. Zehn mal 2 Einer machen 20 Einer, oder so viele Zehner als es Einer waren; 10 mal 2 Zehner sind 20 Zehner, oder so viele Hunderter als es Zehner waren; 10 mal 2 Hunderter sind 20 Hunderter, oder so viele Tausender als es Hunderter waren; 10 mal 2 Tausender sind endlich 20 Tausender oder so viele Zehntausender als es Tausender waren.

Nachdem sich der Schüler ähnliche Aufgaben also eingeübt hat, wird er mit Leichtigkeit zu folgender Abstraction von selbst schreiten: um eine Zahl 10 mal zu wiederholen, muß man an die rechte Seite der Einerstelle nur eine Null setzen.

Ehe man zu mehrern Zehnern oder zu Zehnern mit den Einern verbunden vorschreitet, kann man eine Zahl zuerst hundert, hernach tausend mal nehmen oder wiederholen lassen rc. Im ersten Fall wird man 2 Nullen und im zweyten aber 3 Nullen rechts an das Ende der Zahl anzusetzen haben.

5634 soll 20 mal genommen oder mit 20 multiplicirt werden.

Zwanzig mal eine Zahl wiederholen, heißt auch dieselbe 2 Zehner mal nehmen. Um eine Zahl einen Zehnermal zu wiederholen, wird nur eine Null rechts hinzugefügt, und um sie 2 Zehnermal zu nehmen, wird man das Zehnfache nur zu verdoppeln haben. So giebt man dem Schüler auf, Zahlen mit 30, 40, 50, 60 bis 90 zu multipliciren, ehe man die Einer mit den Zehnern in Verbindung bringt. Desgleichen mit 100, 200, 300 rc., welches unter folgender Norm ausgeführt werden kann. Z. Ex. es soll 4444 hundertmal wiederholt werden. Zuerst wird durch das Hinzusetzen von einer Null diese Zahl 10 mal genommen, und durch die nochmalige Hinzusetzung von einer Null wird das Zehnfache wieder zehnfach, oder das Ursprüngliche 100 mal genommen. Soll die nämliche Zahl 2 Hundertermal genommen werden, so wird das Hundertfache nur verdoppelt, bey 3 Hundertern verdreyfacht rc. Giebt der Lehrer dem Schüler noch ein paar Beyspiele dieser Art zur freyen Ausführung, so wird er ohne allen Anstand dieses zu thun fähig seyn und nicht nur die Einsicht in diese Zahloperation, sondern auch die Fertigkeit derselben gleichzeitig erzielt werden. Ich glaube dieses dem Lehrer vollkommen überlassen zu dürfen nud schreite zu den folgenden Uebungen der Multiplication über.

5624 soll mit 11 multiplicirt werden.

Wenn man diese Zahl mit 11 multiplicirt, so muß sie 1 Zehner und 1 Einer mal wiederholt werden. Wie eine Zahl 1 Zehner mal wiederholt werden könne, haben wir oben entwickelt und eben so ist klar gemacht, wie irgend eine Zahl 1 Einer mal genommen werden müsse, und also bietet auch diese Aufgabe dem Schüler, in so fern man ihn nur auf das Vorhergehende aufmerksam macht, nichts neues mehr dar. Auf diese Weise führt man den Schüler immer vom Einfachen zum Zusammengesetztern, bis er endlich fähig wird, die verwickeltern Aufgaben der Multiplication in freyer Selbstständigkeit und ohne weitere Hülfe des Lehrers zu lösen.

Als Uebung mögen noch folgende Aufgaben gegeben werden.

5604 soll mit 111, und 5604 hernach mit 222 multiplicirt und endlich die nämliche Zahl 309 mal wiederholt werden.

Hat der Schüler dieses selbstständig und ohne weitere Nachhülfe und Handbietung des Lehrers wirklich ausgeführt, so darf angenommen werden, daß er sich eine vollendete Einsicht ins Wesen der Multiplication eigen gemacht habe. Folgende Fragen werden den Schüler noch tiefer ins Wesen dieser Operationen einführen.

3426	a.
24	b.
13704	c.
6852	d.
82224	e.

Fr. Wie oft ist die Zahl c, hernach d und endlich e so groß als a? Wie oft mal beträgt c und d so viel als a? Wie oft c, d und e so viel als a? Was für ein Theil ist a von c und d, oder von c und e, oder von c, d und e zusammen? Was ist c für ein Theil von d oder von e oder von d und e zusammen? Wie oft ist e so groß als b? Antwort: 3426 mal.

Löst der Schüler obige Aufgaben mit Leichtigkeit, so wird auch die Beantwortung der letzten ihm gar keine Schwierigkeit geben. Bey dieser Zahloperation wird es nothwendig und ist in so fern auch wichtig, daß der Schüler mit dem höchsten und vollendetesten Mechanismus, der der Multiplication zum Grunde liegt, bekannt und vertraut werde, und deshalb müssen hier am Ende noch mehrere Aufgaben gegeben werden, die keinen andern Zweck haben, als ihm hierin zur höchsten Fertigkeit zu verhelfen. Mehr aber als 3 bis 4 und höchstens 5 Stunden dürfen auch für die Multiplication nicht verwendet werden, wenn keine Fehlgriffe in den frühern Uebungen, besonders da, wo es sich um die Einsicht handelt, statt gefunden haben. Die Art und Weise, wie diese Aufgaben gegeben werden müssen, können bey der Addition nachgesehen werden, und ich füge diesem bey: Da die Zahlen, welche Nullen mit sich führen, in der Multiplication, besonders wenn es sich um mechanische Fertigkeiten handelt, eigene Schwierigkeiten darbieten; so wird man wohlthun, diesem Rechnung zutragen. Es können deßwegen in den Aufgaben zuerst wenige, und nach und nach immer mehr Nullen angebracht werden. Auch ist nicht zu vergessen, daß alle Beyspiele, die das Kind zur Einsicht in diese Zahloperation zu führen bestimmt sind, eben so behandelt werden müssen, wie dieses bey den Reihenfolgen des Kopfrechnens geschieht. Dieses ist also auch hier die Norm, die zum Vortrag gewählt werden muß. Besonders wichtig ist aber im Anfange des Zifferrechnens das Zusammensprechen der Schüler unter der für das Kopfrechnen angegebenen Modification. Ich verweise zur weitern Einsicht dießfalls also dahin.

Division.

8888 soll durch 2 dividirt oder durch 2 getheilt oder es soll untersucht werden, wie oft zwey in dieser Zahl enthalten sey.

Vermittelst der Uebung, die der Schüler im Kopfrechnen schon hat, wird er das Resultat dieser Aufgabe gleich ohne Hülfe des Zifferrechnens angeben können, und auch, wenn man fordern würde, daß er dieses mit Ziffern wirklich ausführen möchte, so wird er, wenn er bey den Einheiten anfängt, keine Schwierigkeit mehr finden. Es ist daher nothwendig, sogleich Aufgaben folgen zu lassen, die ihm Schwierigkeiten anbieten, welche er nicht mehr so leicht überwinden kann, wenn er auf der rechten Seite der Zifferreihe den Anfang macht.

9347 soll durch 7 dividirt werden.

Fängt der Schüler wieder bey den Einheiten an, so wird er auf Schwierigkeiten stoßen, die nicht so leicht zu überwinden sind, und dieser Umstand bietet dem Lehrer eine Gelegenheit dar, ihn aufzufordern, er möchte einen Versuch machen, bey der höchsten Stelle der Tausend anzufangen. Es wird nicht fehlen, er findet, daß der 7te Theil von 9 Tausendern 1 Tausender gebe und ihm noch 2 Tausender bleiben, oder daß 7 in 9 Tausend einen Tausender mal enthalten sey rc., und wieder 2 Tausender bleiben; diese 2 Tausender in die folgende Stelle abwärts verwandelt, geben 20 Hunderter und 3 Hunderter dieser Stelle machen 23 Hunderter, der siebente Theil von 23 Hundertern ist 3 Hunderter, und bleiben 2 Hunderter; diese 2 Hunderter wieder in die folgende Stelle abwärts verwandelt, geben 20 Zehner, und 4 Zehner, die in dieser Stelle selbst sind, geben 24 Zehner, der 7te Theil davon ist 3 Zehner und bleiben 3 Zehner; diese 3 Zehner in die folgende Stelle abwärts verwandelt, macht mit den daselbst schon vorhandenen Einern 37 Einer; der siebente Theil davon ist 5 Einer und es bleiben noch 2 Einer Rest.

Von 7004 soll der 8te Theil genommen werden, oder man soll untersuchen, wie oft 8 darin enthalten, oder aber, diese Summe soll durch 8 dividirt werden.

Der 8te Theil von 7 Tausendern ist kein Tausender, also werden die 7 Tausender in die künftige Stelle abwärts oder in Hunderter verwandelt, welches 70 Hunderter gibt (in der Hunderterstelle selbst findet sich kein Hunderter); der 8te Theil davon ist 8 Hunderter, und bleiben noch 6 Hunderter, die in die künftige Stelle abwärts verwandelt, 60 Zehner machen, der 8te Theil davon ist 7 Zehner, und bleiben noch 4 Zehner; diese in die folgende Stelle wieder abwärts verwandelt, geben 40 Einer, und die 4 Einer, die sich schon in dieser Stelle befinden, geben 44 Einer; der 7te Theil davon ist 6 Einer und bleiben noch 2 Einer Rest.

Es sollen 9999 durch 10 dividirt werden.

Wird der Schüler auf die nämliche Weise, wie bey den obigen Aufgaben, verfahren, so findet er 999 und bleiben ihm noch 9 Rest. Um ihn aber schnell dahin zu führen, den 10ten Theil von jeder Zahl, ohne viel zu rechnen, nehmen zu können, so verfährt man wie folgt: der zehnte Theil von 9 Tausendern gibt keinen Tausender; diese 9 Tausender in die folgende Stelle abwärts verwan=

delt, geben 90 Hunderter, wovon der 10te Theil eben so viele Hunderter gibt, als es Tausender waren, oder 9; 9 Hunderter, die in dieser Stelle aber noch bleiben, in eine Stelle abwärts verwandelt, machen 90 Zehner, und der 10te Theil davon gibt wieder so viele Zehner, als es Hunderter waren, oder 9; die 9 Zehner, die blieben, werden ebenfalls wieder in eine Stelle abwärts verwandelt, und es gibt 90 Einer; der 10 Theil davon gibt wieder so viele Einer, als es Zehner waren, und es bleiben dann noch 9 Einer; folglich bleibt die Einerstelle unberührt.

Nachdem der Schüler einige Aufgaben auf diese Weise gelöst haben wird, schreitet man zu solchen, die durch einen Hunderter gelöst werden müssen, und befolgt ganz den gleichen Gang, der bey der Multiplication ausführlich angezeigt worden ist; nur mit dem Unterschiede, daß man hier, statt bey der rechten, bey der linken Seite der Ziffern anfängt. Soll eine Zahl durch 20 dividirt werden, so läßt man den Schüler zuerst dieselbe durch einen Zehner auf obige Weise dividiren, oder auch den 10ten Theil davon nehmen und das gefundene Resultat noch einmal durch 2 dividiren. So wird zu 3 Zehnern und 3 Hundertern oder zu 3 Hundertern und 3 Zehnern ꝛc. ꝛc. geschritten.

9064 durch 236 zu dividiren, soll die letzte Aufgabe seyn, die ich für die Entwickelung der geistigen Kräfte des Schülers und zur deutlichen Einsicht ins Wesen der Division hier noch ausführen werde: 236 ist in 9 Tausendern kein Tausendermal enthalten; die 9 Tausender in Hunderter verwandelt, geben 90 Hunderter; 236 ist in 90 Hundertern noch kein Hundertermal enthalten; also werden die

90 Hunderter eine Stelle abwärts oder in Zehner verwandelt, welches 90 Zehner gibt und mit den 6 Zehnern, die sich in dieser Stelle befinden, 906 Zehner ausmachen; 236 Zehner sind in 906 Zehnern 3 Zehner mal enthalten, 3 mal 236 = 708 Zehner und bleiben noch 198 Zehner; diese werden wieder in die künftige Stelle abwärts verwandelt, und machen mit den 4 Einern, die sich in der Einerstelle befinden, 1984 Einer, 236 sind darin 7 Einer mal enthalten, und es bleiben noch 332 übrig.

a)	9064	236 b)
	708	37 c)
	1984	
	1652	
	332	

Wie bey der Multiplication, so können auch bey der Division ähnliche einzelne Fragen gemacht werden. Z. Ex. Wie oft ist die Zahl b in der Zahl a enthalten? Antwort: 37 mal, und es bleiben noch 332. Wie viel fehlt der Zahl a, wenn die Zahl b 38 mal in ihr enthalten seyn soll? Antwort: 4. Was ist die Zahl b für ein Theil von der Zahl a, wenn von letzterer 332 abgezogen werden? Antwort: der 37ste Theil. Werden aber 4 zu der Zahl a hinzugezählt, was ist in diesem Fall die Zahl b für ein Theil von der Zahl a? Antwort: der 38ste Theil.

Am Ende dieser Uebung müssen, wie bey der Multiplication, dem Schüler Aufgaben gegeben werden, die keinen andern Zweck haben, als seine mechanischen Fertigkeiten auch in dieser Form auf die höchste Stufe zu erheben. Zu der Division muß etwas mehr Zeit verwendet werden als zur Multiplication. Nach Beendigung dieser vier Rechnungsarten wird man wohl thun, dem Schüler eine Reihe Aufgaben über dieselben gemischt durch einan=

der zu geben, mit der Aufforderung, sie so schnell als immer möglich zu rechnen. Der Zweck dieser Aufgaben ist also kein anderer, als die verschiedenartige Behandlung einer jeden derselben schnell, auch in dieser abgeänderten Ordnung aufzufinden und sich dadurch zugleich den höchsten Grad von mechanischer Fertigkeit eigen zu machen. Daß man auf dieser Stufe nach und nach zu höhern Zahlen steigen darf, versteht sich von selbst; doch wird man wohl thun, für einmal nicht weiter als zu den Millionen zu gehen. Mehr als etwa 3 bis 5 Stunden dürfen auch hierauf nicht verwendet werden. Ich zeige bey der Darlegung der Zifferrechnungen die Stundenzahl genau an, damit nicht auf Kosten der geistigen Entwickelung dem Mechanismus ein Spielraum eingeräumt werde, der die harmonische Bildung zu stören geeignet ist. Wird die Zahl in dem Geist behandelt, wie ich glaube, umständlich genug gezeigt zu haben; so muß in höchstens 30 Stunden Zeit sowohl die Einsicht als auch die mechanische Fertigkeit des Zifferrechnens, so weit sie der Jugend in diesem Alter gut ist, erzielt werden. Den Beschluß dieser vier Rechnungsarten mögen folgende Fragen machen: Wodurch unterscheidet sich die Addition von der Subtraction, die Addition von der Multiplication? Wodurch aber die Subtraction von der Multiplication? rc. Was kommt der Addition und was der Subtraction rc. eigenthümlich zu? Was kannst du bey der einen oder andern dieser Rechnungsarten als allgemeine Regel angeben?

Was man gewöhnlich die Probe dieser vier Rechnungsarten nennt, wird jeder Schüler, nachdem man ihm solche

Fragen zu lösen vorlegt, finden und auf die bestimmteste Weise anzugeben im Stande seyn. Wollte man ihn aber vorzugsweise nur auf diejenige Form bringen, die man gewöhnlich als Probe dieser Rechnungsoperationen benutzt, so mögen folgende Fragen hier ihren Zweck vollkommen erreichen.

Bey der Addition, Subtraction, Multiplication ꝛc. soll untersucht werden, ob in der Berechnung kein Fehler statt gefunden, es fragt sich, wie man dieses anzugehen habe?

Daß der Schüler zuerst die nochmalige Rechnung der Aufgabe vorschlagen wird, liegt in der Natur der Sache ganz gegründet; aber an diesem Faden wird dann weiter geschritten.

Lehrer. Mache ein Subtractionsbeyspiel auf deiner Schiefertafel, und siehe hernach, ob du auf keine andere Weise finden könnest, daß es richtig gerechnet worden sey. — Findet der Schüler noch nicht, daß die zu subtrahirende Zahl mit dem Rest immer der Zahl gleich seyn müsse, von der abgezogen worden ist, so macht er ihn hierauf aufmerksam. Eben so verfährt er mit der Multiplication, Division ꝛc. Auch liegt es hier nicht außer dem Kreise des Kindes, es für die Probe noch andere, als die gewöhnlich bekannten Formen aufsuchen und aufstellen zu lassen. Es gehört ganz auf diese Stufe, den Schüler mit den Kunstausdrücken, mit denen die Zahlen in der einen oder andern dieser Operationen benannt werden, bekannt zu machen; z. B. bey einer Divisionsaufgabe kann ihm gesagt werden, man nenne die Zahl, durch die man untersuche, wie oft sie in der andern enthalten sey, Divisor, diejenige, die sie enthält, Dividendus, die Zahl aber, die anzeigt, wie oft sie wirklich in derselben enthalten sey, Quotient. Mit den Ausdrücken, die in der Multiplication, Subtraction und Addition angenommen sind, wird auf die gleiche Weise verfahren.

Ehe man zu den Brüchen übergeht, wird man wohl thun, dem Schüler noch einige Aufgaben zu geben, die aus den arithmetischen oder geometrischen, oder aus den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen der Zahllehre genommen werden, worüber die Behandlung der Einheiten als Entwickelung der geistigen Anlagen des Kindes nachzusehen ist. Als Beleg und Anleitung mögen ein paar Aufgaben hier noch einen Platz finden.

Fr. Wie viel beträgt die Zahl, die um 26378 mehr ist als 29464? Es sollen 2 Zahlen aufgestellt werden, wovon der Unterschied 24448 und der so groß ist, als die kleinere Zahl? Ferner sollen zwey Zahlen aufgestellt werden, wovon der Unterschied um 2048 kleiner ist, als die größere Zahl? Wie viel wird die Hälfte vom Drittel von 104190 seyn? Wenn man 2447 so oft wiederholt, als diese Zahl Einheiten hat, wie viel wird es geben? Oder wenn man sie um 10 mal mehr wiederholt, als dieselbe Einheiten hat, wie viel wird es geben?

Wird der Schüler mit Leichtigkeit Aufgaben dieser Art lösen, so ist es nicht nöthig, daß man sich hier verweile. Im Fall der Schüler Anstand nähme, ähnliche Aufgaben ohne Hülfe des Lehrers zu lösen, so wäre dieses ein untrügliches Zeichen, daß ihm die aufgestellten

Mit-

Mittel nicht gehörig eingeübt worden. Was auch bey einer mangelhaften Führung des Schülers dennoch hier gethan werden kann, darf ich hier der Beurtheilung des Lehrers vollkommen überlassen, indem ihm der aufgestellte Typus der Zahlenlehre hinlängliche Hülfsmittel an die Hand gibt.

Anwendung der Ziffer auf die Addition der Brüche.

Die einfachen Brüche von den Brüchen verschiedener Art trennen zu wollen, ist bey'm Zifferrechnen nicht mehr nothwendig. Man kann daher den Anfang gleich mit folgenden Aufgaben machen.

Es sollen $^1/_{10}$, $^1/_{11}$, $^1/_{12}$, $^1/_{13}$, $^1/_{14}$ ꝛc. zusammengezählt oder addirt werden.

Um diese Brüche zu addiren, weiß der Schüler aus den Uebungen als Entwickelung seiner Geisteskräfte, daß er dieselben unter einerley Benennung zu bringen hat. Dieses geschieht auf eine ähnliche Weise, wie es als Kopfrechnungsübung schon geschehen ist. Um 10tel zu erhalten, muß man ein Ganzes in 10 gleiche Theile theilen; will man in diesem Ganzen noch 11tel erhalten, so muß man jeden Zehntel noch in 11 oder das Ganze in $10 \times 11 = 110$ gleiche Theile theilen; will man in dem Ganzen noch 12tel finden, so muß man jeden der 110tel in 12 gleiche Theile theilen, oder 12×110 u. s. w. Alle diese Brüche werden sich in einem Ganzen vereinigen, das 240240 gleiche Theile enthält. Ein Zehntel ist der 10te Theil des Ganzen, also der 10te Theil von 240240 Theilen oder 24024, ein Eilftel ist der 11te Theil des Ganzen, also wieder der

11te Theil dieser Summe, und so wird dieses bis zum 14tel fortgesetzt, welcher den 14ten Theil von 240240 Theilen erhalten wird und 17160 beträgt. Diese Theile werden, wie bey einem gewöhnlichen Additionsbeyspiele, zusammengezählt, worüber die Addition des Zifferrechnens oder auch des Kopfrechnens nachgesehen werden kann. Statt $^1/_{10}$, $^1/_{11}$ 2c. zusammenzuzählen, können $^3/_{10}$, $^4/_{11}$, $^7/_{13}$ 2c. gegeben werden. Die Auflösung ist mit der obigen so ähnlich, daß eine weitere Ausführung davon hier ganz überflüssig wird. Eben so können zu den Brüchen noch Ganze zum Addiren gegeben werden. Drey bis vier Beyspiele werden mit dem, was ich so eben aufstellte, für die Addition der Brüche hinreichend seyn. Was ich bey dem Zifferrechnen mit Ganzen über die Erlangung der mechanischen Fertigkeiten bemerkte, findet auch bey den Brüchen volle Anwendung und darf nicht vernachlässigt werden. Die Zahl der Stunden, die hierauf verwendet werden können, muß aber hier eher vermindert als vermehrt werden. Wie sich der Lehrer in seinem Vortrag zu benehmen habe, glaube ich keine weitere Erinnerung mehr anbringen zu dürfen, wenn man das fest im Auge behalten will, was diesfalls aufgestellt worden ist. Weil aber jede Stufe der Bildung etwas Eigenthümliches besitzt, so füge ich noch Folgendes bey: So wichtig und wesentlich auch das laute Zusammensprechen der Schüler im Ganzen ist, so fängt es an, sich hier zu verlieren, und ein stilles für sich Arbeiten und Rechnen nimmt diese Stelle ein. Das Lautsprechen steht mit der sinnlichen Anschauung auf einer und derselben Linie, und eben so steht die geistige Anschauung und Abstraction mit dem stillen, geräuschlosen Rechnen auf einer und der nämlichen Linie, und fängt an, mit der ersten seine Stelle zu wechseln. Auch unterliegt es gar keinem Zweifel, daß jeder Schüler, der zweckmässig geführt worden ist, jede Aufgabe ohne weitere Nachhülfe des Lehrers, wie ich sie ihm gegenwärtig vorlege, zu lösen im Stande seyn muß. Würden aber noch unüberwindliche Schwierigkeiten getroffen werden, so könnte die Zuflucht nur zu einfachern Aufgaben genommen werden, was aber jedoch der Lehrer, der den Geist dieser Darstellung nur einigermaßen auffaßt, wissen kann, ohne daß ich mich diesfalls noch einmal umständlich erörtere.

Subtraction.

Von $^1/_{99}$ soll $^1/_{100}$ abgezogen werden, es fragt sich, wie viel noch bleibe?

So wie der Schüler mit Einsicht und Sicherheit $^1/_3$ von $^1/_2$ als Kopfrechnungsübung abziehen kann, so wird er eben so leicht und zuverlässig mit Hülfe seiner Zifferbehandlung finden, daß sich diese zwey Brüche in den 9900teln vereinigen; denn um 99tel zu erhalten, muß man ein Ganzes in 99 gleiche Theile theilen; will man in dem nämlichen Ganzen noch 100tel haben, so muß jeder der 99 gleichen Theile in 100 und das Ganze in 9900 Theile getheilt werden; $^1/_{100} = 99$ und $^1/_{99} = 100$, diese 99 von 100 Theilen abgezogen, bleibt noch $^1/_{9900}$.

Drey bis vier Aufgaben, die in ihrer Schwierigkeit steigend sind, werden auch für diese Rechnungsformen hinreichend seyn. Ehe man aber mit dem Schüler weiter geht, müssen ihm noch einige Aufgaben über die Subtraction gegeben werden, um sich diejenige mechanische Fertigkeit zu erwerben, die in einem steigend höhern Grad gefordert werden darf.

Multiplication.

$^1/_{304}$ durch $^1/_{147}$, oder $^3/_{101}$ durch $^{17}/_{248}$, oder 3 $^1/_{20}$. durch $^{19}/_{114}$, oder 10 $^2/_3$ durch 19 $^{24}/_{129}$ zu multipliziren.

Um $^1/_{304}$tel durch $^1/_{147}$ zu multipliziren, muß man den ersten Bruch so oft wiederholen, als der zweyte Ganze beträgt. $^1/_{147}$ ist der 147ste Theil eines Ganzen, also muß $^1/_{304}$ auch nur $^1/_{147}$tel mal genommen werden. Um den 147sten Theil von $^1/_{304}$ zu nehmen, muß man den 304tel in 147 gleiche Theile theilen, welches 44688 Theile giebt, und dieser Theil muß einmal genommen werden, folglich macht es $^1/_{44688}$.

Um die 2te Aufgabe zu lösen, verfährt man ganz auf die gleiche Weise, nur mit dem Unterschied, daß man es statt von einem, von 3 Theilen zu nehmen hat; ferner, daß man es, statt einmal, in dieser Aufgabe 17 mal wiederholen muß.

In der dritten Aufgabe kann man rücksichtlich der Brüche wie in der 2ten verfahren. Weil sich aber dort noch 3 Ganze befinden; so müssen dieselben auch $^{19}/_{114}$tel mal genommen werden. Der 114ste Theil von 3 Ganzen ist $^3/_{114}$, dieses muß 19 mal wiederholt werden, und am Ende werden die Brüche auf die gewöhnliche Weise addirt.

Die Auflösung der 4ten Aufgabe ist nur noch ein kleiner Zusatz zu derjenigen der dritten.

Die weitere Ausführung kann in den Aufgaben, die für das Kopfrechnen aufgestellt wurden, nachgesehen werden, so wie auch die Art und Weise, wie die so eben aufgestellten Aufgaben ferner zu behandeln und auszuführen sind. Bevor zu andern Uebungen geschritten wird, muß man nicht vergessen, daß noch einige Aufgaben gegeben werden müssen, um dem Schüler Gelegenheit zu verschaffen, sich die nöthigen mechanischen Fertigkeiten zu erwerben. Die Behandlung der Division geht so klar und einfach aus diesen Uebungen hervor, daß die Ausführung hier nicht nur entbehrlich wird; sondern die Nichtausführung ist als ein Probierstein anzusehen, ob man das Wesen der Darlegung der Zahlverhältnisse wirklich aufgefaßt habe. Sogar der Schüler sollte im Stande seyn, die hier mangelnde Uebung zu ergänzen. Dagegen füge ich den Bruchverhältnissen noch einige Betrachtungen bey, die nicht ganz entbehrlich sind.

Fr. Wie hat man zu verfahren, um zwey, drey ꝛc. Brüche von verschiedener Art zusammenzuzählen? *)

Kennt der Schüler die Kunstausdrücke, so läßt man ihn zur Uebung mit diesen Worten die Verfahrungsart angeben. Er würde sich dem zufolge also ausdrücken: Man multiplizirt den Nenner des ersten Bruches mit dem

*) Hier kann man den Schüler mit den Kunstausdrücken „Zähler, Nenner" ꝛc., die bey den Brüchen vorkommen, bekannt machen. Wie dieses auf die einfachste, der Natur des Kindes entsprechendeste Weise geschehen könne, ist bey ähnlichen Anlässen früher erörtert worden und kann hier im nämlichen Geiste nachgeahmt werden.

Nenner des zweyten, ferner multiplizirt man das Produkt mit dem Nenner des dritten Bruches, und so dieses Produkt wieder mit dem Nenner des vierten, wenn man vier Brüche addiren will. Hat man so den allgemeinen Nenner, der sich im letzten Produkt zeigt, so dividirt man in dieses Produkt mit dem Nenner des ersten Bruchs und multiplizirt den Quotienten durch seinen Zähler ꝛc.

Fr. Wie hat man zu verfahren, wenn man zwey Brüche verschiedener Art von einander abziehen soll?

Auch hier läßt man den Schüler die allgemeine Regel angeben, unter welcher dieses geschieht. Aehnliche Fragen können über die Multiplication und Division statt finden. Sollte der Schüler ebenfalls nicht im Stande seyn, das Wesentlichste der Verfahrungsart der vier Rechnungsformen mit Brüchen anzugeben, so darf auf keinen Fall die Schuld dem Schüler beygemessen werden und eben so wenig dem hier aufgestellten Gange. Es müßte ein solcher Mißgriff in dem zu schnellen Vorschreiten oder in der unzweckmässigen Behandlung des Schülers oder aber endlich in der geistigen Unfähigkeit desselben gesucht werden. Daß das Weitereilen ohne Begründung der Anfangspunkte im Zählenlernen eben so zu nichts führt, wie in allen andern Unterrichtsfächern, liegt klar am Tage, und Fehlgriffe dieser Art wieder gut zu machen, würde ein Rückschritt und allem andern vorzuziehen seyn. Daß alle Fragen, die bey dem Zifferrechnen mit Ganzen statt fanden, auch hier an den Schüler gerichtet und von ihm beantwortet werden können, liegt außer Zweifel; jedoch müssen sie bey den Bruchverhältnissen, wie ich schon früher bemerkte, verkürzt werden. Diese Verkürzung findet im nämlichen Verhältniß statt, als die Vollendung bey'm Schüler zunimmt. Ein charakterisirendes Kennzeichen einer guten Führung der Jugend ist, wenn bey'm Vorwärtsschreiten immer mehr abgekürzt, statt ausgedehnt werden darf. Wenn also 30 Stunden zu den vier Zahloperationen mit Einheiten nothwendig sind, so sollte das was in und durch die Brüche der Jugend gegeben werden kann und gegeben werden soll, auf keinen Fall mehr als 20 Stunden betragen. Während dem der Schüler mit dem Zifferrechnen, sowohl mit den Einheiten als Brüchen, beschäftigt ist, soll die Entwickelung der geistigen Anlagen des Kindes durch die Zahl nicht ausschließlich auf diesen Punkt gerichtet werden; sondern das Kopfrechnen wird noch nach andern Richtungen gleichzeitig fortgesetzt werden müssen, wie aus gegenwärtiger Darlegung in den weiter folgenden Uebungen zu sehen ist. Die Zeit, die man auf das Zifferrechnen zu verwenden hat, wird aber auf dieser Stufe verlängert und die des Zifferrechnens vermindert werden müssen, und zwar so, daß jetzo für beydes gleich viel Zeit angesprochen werden darf. Diese folgenden Uebungen des Kopfrechnens schließen sich unmittelbar an die Brüche, die als Kopfrechnungsübungen in dieser Schrift sich niedergelegt finden, an.

Von der Anwendung der Zahl.

Ihre Anwendung ist einer doppelten Richtung, und zwar entweder als Uebung im Kopf- oder aber als Uebung im Zifferrechnen, fähig. Damit der Klarheit in dieser

Darlegung kein Abbruch gethan werde, will ich die diesfälligen Uebungen und Reihenfolgen trennen, und später zeigen, wie der Lehrer dieses seinem Schüler neben einander vorzulegen habe. Ich mache, wie natürlich, den Anfang mit dem Kopfrechnen. Maaß, Gewicht und Münze haben in jedem Lande ihre eigenthümlichen Eintheilungen und Benennungen; ich kann und will daher für diesen Endzweck in diese so weitgehende Abwechslung nicht eintreten. Ich bediene mich allgemein-bekannter Namen und Eintheilungen, ohne irgend eine Abwechselung in diese Darlegung zu bringen, damit ich einerseits nicht unnöthigerweise mich über einen Punkt ausdehne, der zur Verdeutlichung der Sache nicht nur nichts beyträgt, sondern derselben noch hinderlich wäre, anderseits aber, weil in der Schrift sich nicht viele Eintheilungen und Benennungen von Maaß, Gewicht und Münze sich finden, die dem Lehrer nur hinderlich und ihn störend werden könnten. Ueberdieß darf ich annehmen, er sey im Stande, an die Stelle dieser Namen und Eintheilungen diejenigen des Landes, in dem er wohnt, zu bringen. Eine große Mannigfaltigkeit von Eintheilungen und Benennungen würde den Anfang dieser Uebungen nicht nur erschweren, sondern der Einheit, Deutlichkeit, Festigkeit und leichten Anwendbarkeit sehr mangeln. Wesentlich ist bey allem Schulunterricht die Trennung des Fremdartigen und die Reinerhaltung jedes einzelnen, selbstständigen Gesichtspunkts. Das Leben darf in der Freyheit und in der Verwirrung bildend aufgefaßt und benutzt werden; die Schule aber muß dieser Verwirrung und dieser Freyheit Ordnung geben, wenn sie für die Jugend bildend werden soll. Der im Anfange der Zahlenlehre aufgestellte Gang wird auch hier befolgt und zum Theil an das angeschlossen werden, was das Leben ohne weiteres Hinzuthun der Menschen thut. Weil ich aber nicht allgemein annehmen darf, daß durch die häusliche Bildung das geleistet und erzielt worden sey, was in dieser spätern Epoche möglich ist, so werde ich diesem Umstande in der Darlegung Rechnung tragen. Ich schreite zu den Uebungen selbst.

A d d i t i o n.

Fr. Wie viel machen 2 fl. 30 kr., 3 fl. 45 kr. und 5 fl. 7 kr. zusammen?

Wie viel machen 3 Zentner, 49 Pfund und 3 Loth und 2 Zentner, 98 Pfund und 5 Loth zusammen?

Wie viel geben 2 Fuder, 3 Eimer und 17 Maß und 6 Fuder, 1 Eimer und 19 Maß zusammen?

Wie viel werden 9 Klafter, 5 Schuh, 3 Zoll und 4 Linien, 6 Klafter, 3 Schuh, 2 Zoll, 5 Linien und 1 Klafter, 1 Schuh und 1 Zoll zusammen geben?

Ich gebe keine Antworten an, um gleichsam jeden Lehrer im Anfange zu nöthigen, diejenigen Maaße und Gewichte, die in seiner Gegend gangbar und angenommen sind, an die Stelle dieser Aufgaben zu setzen; und in so weit muß man dieses nur als eine Veränderung des Namens ansehen und behandeln. Hat der Schüler aber keine richtige Anschauung von diesen Eintheilungen der Maaße und Gewichte seines Landes, so müßte ihm dieses, wenn durch die Beschreibung kein richtiger Begriff davon gegeben werden konnte, in der Wirklichkeit entweder durch Vorlegung dieser Gegenstände selber oder durch Hinführung zu denselben gezeigt werden. Bevor ich weiter gehe, muß ich hier auf einen Mißgriff, den man in der Erziehung und im Unterricht allgemein macht, aufmerksam machen. Die Beschreibung durch Worte, ohne der Jugend den Gegenstand, der beschrieben wird, vorzulegen, ist so allgemein und genugthuend anerkannt, daß man diesem allgemeinen Gefühl nicht folgen darf; sondern füglich die Sache umkehren und dem Schüler eine Beschreibung von dem geben muß, was der Lehrer in einem solchen Fall gewöhnlich thut. Kann er ohne Hülfe eine Beschreibung machen, die geeignet ist, dem Lehrer ein anschauliches Bild von einem solchen Gegenstand einzuprägen, so mag die wirkliche Vorzeigung desselben dann als entbehrlich angesehen werden. Hat aber das Kind auch eine richtige Anschauung von diesen Maaßen und Gewichten, so ist dieses, wie die Darlegung der häuslichen Bildung zeigte, nichts weniger als genugthuend. Vor allem aus muß der Schüler durch den Gebrauch seiner Sinne zur richtigen Schätzung der Gegenstände des Maaßes und Gewichts geführt werden. Es ist wesentlich darum zu thun, ihn mit der höchsten Zuverlässigkeit dahin zu führen, daß er die an seinem Orte gewöhnlich gangbaren Maaße und Gewichte mit Sicherheit und Genauigkeit durch den Gebrauch der Sinne anzugeben in den Stand gesetzt werde. Es handelt sich um nichts weniger, als daß er mit Sicherheit dahin gelange, durch den Gebrauch seiner Sinne einen Zentner, ein Pfund, ein

Loth von einer öfter vorkommenden Waare mit der größten Richtigkeit zu schätzen und dieses auf den ganzen Umfang aller Gegenstände seines Gebrauches, die gemessen und gewogen werden, auszudehnen. Ich kenne die Einwendung, die man mir gegen diesen Grundsatz und seine wirkliche, praktische Ausführung machen wird: der Schüler könne nämlich in diesem Alter keinen Zentner aufheben, also mangele ihm das ganz, was zur Bestimmung dieser Gegenstände durch die Sinne nothwendig sey u. s. w. Wer aber einen Sinn nicht gebrauchen kann, muß dafür einen andern in Thätigkeit setzen. Wir haben dießfalls an den Blinden und Taubstummen Beyspiele, die keinen Zweifel über ihre Fähigkeit und Genügsamkeit mehr übrig lassen. Aus diesem geht dann freylich klar hervor, wie nachtheilig das unthätige Leben in der frühern Jugend für den Schüler einwirken müsse und wie wesentlich es immer sey, die Anwendungsaufgaben für die Schule nicht vom Leben zu trennen.

Der Schulunterricht soll die Jugend eigentlich recht in's thätige Leben einführen, und dieses thätige Leben muß hinwieder als praktische Anschauungsgrundlage dem Schulunterricht dienen. „Thut aber das Leben von alle diesem an der Jugend nichts, was kann und soll dann geschehen?" ist eine Einwendung, deren Beantwortung ganz in den Kreis der gegenwärtigen Schrift gehört. So wie Tabellen und viele andere Versinnlichungsmittel mit vielem Recht in die Schule eingeführt werden, so müssen bey diesem Mangel dann Gegenstände in dieselbe gebracht werden, die diesem abzuhelfen geeignet sind und an denen es seine Sinne im Schätzen der verschiedenen Maaße und Gewichte eben so zu üben Gelegenheit findet, wie es dieses früher in dem häuslichen Leben hätte thun können und sollen. Eine wirkliche Ausführung hievon ist dem, was ich im Anfange dieser Schrift zeigte und im häuslichen Leben bis zur Epoche der Schulfähigkeit des Kindes gethan werden sollte und könnte, ziemlich ähnlich; freylich muß dem vorgerücktern Alter und dem höhern Grad der Bildung des Schülers auf eine gehörige Weise Rechnung getragen werden. Ich überlasse die weitere Ausführung dem Lehrer und knüpfe an den oben abgeschnittenen Faden die Uebungen wieder an.

Der Lehrer fordert die Schüler auf, ähnliche Aufgaben, wie die letzten, sich unter einander aufzugeben, damit sie geübt werden, sich selbst in das praktische Leben zu versetzen.

Die letzten Aufgaben mit andern Benennungen dem Schüler vorgelegt.

Erste Aufgabe. Wie viel wird jemand verdienen, wenn er in der einen Woche 2 fl. 30 kr., in der andern aber 3 fl. 45 kr., und in der dritten 5 fl. 7 kr. zum Lohn erhält?

Für die 2te Aufgabe: In dem einen Monat hat man 3 Zentner, 49 Pfund und 3 Loth von dieser oder jener Waare gebraucht, in der andern aber 2 Zentner, 98 Pfund und 5 Loth; es fragt sich, wie viel man in den zwey Monaten gebrauchen werde?

Daß die mannigfaltigste Abwechselung von ähnlichen

Anwendungsaufgaben statt finden könne, unterliegt jetzt keinem Zweifel mehr und kann gewiß ohne Mühe und Schwierigkeit von jedem Lehrer nach Bedürfniß erweitert werden.

Subtraction.

Auch für diese Rechnungsform können die Aufgaben der Addition gegeben und benutzt werden, und ich kann die Ausführung hievon jedem Lehrer überlassen. Ein paar Aufgaben, die in der Subtraction noch einige Schwierigkeiten darbieten könnten, werden als Ergänzung zu dem, was der Lehrer thut, hier noch eine Stelle finden.

Von 4 fl. 40 kr. 3 hll. soll man 3 fl. 59 kr. 7 hll. abziehen, und sehen, wie viel noch bleibe?

Oder also ausgedrückt:

Jemand besitzt 4 fl. 40 kr. 3 hll., ist aber davon schuldig oder hat davon gebraucht 3 fl. 59 kr. 7 hll., es fragt sich, wie viel ihm noch bleiben?

Auch kann man diese Aufgabe noch folgendermaßen ausdrücken:

Es verbraucht jemand in der Woche 3 fl. 59 kr. 7 hll., verdient aber in der nämlichen Zeit 4 fl. 40 kr. 3 hll., es fragt sich, wie viel ihm am Ende der Woche noch bleibe?

Schon aus diesem einzigen Beyspiele sieht man, auf wie mannigfaltige Weise jede Aufgabe, die sich in der Addition findet, ausgedrückt und welche Bedeutung denselben gegeben werden kann. Viele Beyspiele werden aber auf keinen Fall nothwendig, wenn die geistige Entwickelung der Anlagen des Kindes die Vollendung erhalten hat, die ich voraussetze und fordere. Auch sind diese Anwendungsaufgaben eigentlich nur als benannte Zahlen in's Auge zu fassen, die noch nicht tief in das praktische Leben eingreifen.

Multiplication.

Wenn jemand in einem Tage oder in einer Woche diese oder jene Summe in fl., kr. und hll. gebraucht oder verdient, wie viel wird er in 10 Tagen oder 10 Wochen gebrauchen oder verdienen?

Weil hier leicht Zahlen angegeben werden könnten, die vorzüglich die mechanischen Fertigkeiten und die Gedächtnißkraft des Kindes in Anspruch nehmen, so muß man sich deßhalb hüten; denn auch diese Aufgaben haben keinen andern Zweck als die Entwickelung der Geisteskraft mit Anwendungsaufgaben zu vervollständigen.

Wenn man von 1 Zentner, Fuder, Eimer, Klafter rc. 1 fl. 36 kr. 1 hll. bezahlt; wie viel wird man von 10 Zentnern, Fudern, Eimern, Klaftern rc. zu bezahlen haben?

Wenn ein Fußboden 2 Klafter und 3 Schuh lang und 1 Klafter und 4 Schuh breit ist, wie viele Quadratschuh wird der ganze Boden enthalten?

Um diese Art Aufgaben zu lösen, verwandelt man die Klafter der Länge und Breite nach zuerst in Schuhe, und verfährt dann, wie wenn alles nur in Schuhen angegeben worden wäre.

Division.

Es besitzt jemand 10 fl., bedarf aber täglich oder wöchentlich 1 fl. 10 kr. 3 hll., es fragt sich, wie lange er daran haben werde?

500 Quadratschuh werden wie viele Quadratklafter machen und wie viele Schuhe werden noch als Rest bleiben?

687 Pfund und 2 Loth werden wie viele Zentner, Pfund und Loth ausmachen?

Arithmetische Vergleichung.

Es verdient jemand in einer Woche 1 fl. 30 kr. 3 hll., in einer zweyten Woche aber 3 fl. 48 kr. 7 hll.; es fragt sich, was der Unterschied des Verdienstes dieser zwey Wochen sey? oder aber, wie viel er die eine Woche mehr oder weniger verdient habe als die andere?

Es verdient oder verbraucht jemand den ersten Tag in der Woche 1 fl. 10 kr. 1 hll., und jeden künftigen Tag immer 15 kr. mehr; es fragt sich, wie viel er am letzten Tage der Woche Gulden, Kreuzer und Heller verdient oder verbraucht habe?

Geometrisches Verhältniß.

Wie viel macht der dritte Theil von 123 Ztnr., 24 Pfd. und 3 Lth., in Zentnern, Pfund und Loth?

Um diese Aufgabe zu lösen, macht der Lehrer den Schüler aufmerksam, daß er den dritten Theil zuerst von den Zentnern, hernach von den Pfunden und endlich von den Lothen nehmen könne, ohne eine Verwandelung der Zentner in Pfunde ꝛc. vornehmen zu lassen. Blieben aber bey dieser Verfahrungsweise Zentner übrig, so müßte man den Rest in Pfunde verwandeln und die in der Aufgabe sich befindenden Pfunde hinzuzählen, hernach den

3ten Theil davon nehmen ꝛc. Soll man zwey und mehrere Theile nehmen, so wird ganz auf die gleiche Weise verfahren, indem man zuerst einen Theil nimmt, hernach diesen Theil wiederholt. Sehr leicht ist es als Kopfrechnungsübung, irgend einen und mehrere Theile von sehr hohen Zahlen zu nehmen; doch muß man sehr acht geben, dieses nicht zu weit zu treiben, wenn man den mechanischen Fertigkeiten und dem Gedächtniß das Uebergewicht, gegen welches ich mich gleich im Anfange bestimmt aussprach, nicht einräumen will. Wo man leicht glänzen kann, da sind Lehrer und Schüler oft geneigt, sich zu zeigen. Die gewöhnliche unrichtige Behandlung der Schulprüfungen, in denen man dem Gedächtniß und den mechanischen Fertigkeiten einen Werth giebt, den sie nicht verdienen, ist höchst nachtheilig und gefährlich für die eigentliche Entwickelung der Geisteskraft des Kindes und eine Klippe, an der viel Gutes, das die Schule leisten könnte, scheitert. Die Zahl ist ein ganz vorzüglicher Unterrichtszweig, bey ähnlichen Mißgriffen dem Beobachter und Prüfer, der nicht in's Wesen der Sache einzudringen vermag, Sand in die Augen zu streuen. Eine ernstere Würdigung dieses Umstandes ist hier um so nothwendiger, als die Zahl wieder in ihr geistiges Gebiet zurückgeführt werden muß, wenn sie die Früchte tragen soll, die man mit vollem Recht von ihr erwarten darf. Ich kann deßwegen nicht zugeben, daß diese Segensfolgen durch eine unrichtige Anwendung der aufgestellten Grundsätze und ihrer Ausführungsmittel gestört werden. Die bis jetzt aufgestellten Anwendungsübungen sind, wie ich früher schon bemerkte, nur als Aufgaben mit benannten Zahlen in's Auge zu fassen. Von hier aus aber, oder von dem geometrischen Verhältniß werden die eigentlichen Anwendungsaufgaben, die tiefer in's Leben eingreifen, ihren Anfang nehmen, und deßwegen werde ich da einhalten und vorher noch zeigen, was in andern Richtungen mit der Zahl, als Entwickelung der Geisteskräfte des Kindes und als Anwendung derselben auf die Ziffer vorangehen muß, um später dann mit aller Vorbereitung und Freyheit zu dieser höhern Stufe der Anwendung übergehen zu können.

So wie über die Addition, Subtraction, Multiplication ꝛc. Anwendungsaufgaben mit benannten Zahlen gegeben wurden, so können die Addition und Subtraction, oder die Addition und Multiplication, oder die Addition und Division, oder die Addition und das arithmetische Verhältniß u. s. w. mit einander verbunden werden, worüber die ersten Uebungen der Zahllehre Anleitung und Aufschluß geben. Um dieses zu erleichtern und anschaulicher zu machen, werden ein paar Beyspiele, die aus solchen Verbindungen hervorgehen, hier nicht ganz überflüssig seyn.

Fr. Wenn jemand alle Arbeitstage in einer Woche, des Tages 1 fl. 24 kr. 3 hll. verdient, aber jeden Tag dann wieder 56 kr. 4 hll. verbraucht, wie viel wird ihm am Ende der Woche noch bleiben?

Man kann zuerst sehen, wie viel er in einem Tage, nachdem das, was er gebraucht hat, abgezogen worden ist, noch verdiene, und dann den Rest sechsmal nehmen; oder aber, man kann untersuchen, was er in der Woche verdiene, und eben so, was er gebrauche, und letzteres von erstern abziehn.

Ein Garten ist 4 Klafter 3 Schuh breit und 10 Klafter und 1 Schuh lang, wie viel wird es Gartenbeete geben, die 1 Klafter breit und 1 Klafter und 3 Schuh lang sind?

Die leichteste Art der Auflösung dieser Aufgabe wird wohl seyn, wenn man den ganzen Garten und hernach die Gartenbeete in Quadratschuhen berechnet, und dann untersucht, wie oft letzteres in erstern enthalten sey.

Um dem Lehrer den Gang, den er mit seinem Schüler zu nehmen hat, genau vorzuzeigen, füge ich dem Gesagten noch folgendes bey: Während dem mit den Schülern der Anfang im Zifferrechnen gemacht wird, müssen die Brüche und die so eben aufgestellten Anwendungsaufgaben als Kopfrechnungsübungen so fortgesetzt werden, daß, nachdem die vier Rechnungsarten mit Ziffern beendigt sind, man sich mit diesen Anwendungsaufgaben ebenfalls am Ende befindet. Daß die so eben aufgestellten Anwendungsübungen auch als Uebungen des Zifferrechnens benutzt werden können und benutzt werden müssen, unterliegt keinem Zweifel. Der hiebey zu befolgende Gang ist theils in dem gegenwärtig Aufgestellten, theils in den Uebungen des Zifferrechnens nachzusehen und diese Norm kann ganz befolgt werden. Zeithalber darf das Doppelte, das für das Kopfrechnen angesprochen wurde, für das Zifferrechnen benutzt werden; denn dieses spricht bedeutend höhere Zahlen an, die mehr Zeit erfordern, um die Resultate, die man dießfalls zu suchen hat, finden zu können. Ein wesentlicher Unterschied dieser Aufgaben von denjenigen des Kopfrechnens besteht darin, daß man höhere Zahlen zu geben hat, und deßwegen kann auch ohne weitere Anleitung gewiß jedermann, der den Geist und das Wesen des Aufgestellten aufgefaßt hat, dieses ohne Anstand ausführen.

Die gleichen Uebungen können sowohl im Kopfrechnen als im Zifferrechnen auf Brüche ausgedehnt werden. Ich bemerke hiebey jedoch, daß weder beym Kopfrechnen noch beym Zifferrechnen mehr als 3 bis 4 Stunden auf eine solche Ausführung verwendet werden dürfen. Auch liegt es ganz und gar nicht außer dem Kreis und der Kraft des Schülers, wenn ihn der Lehrer auffordert, auf die Brüche jetzt anzuwenden, was er im Wesen als geistiges Eigenthum in sich trägt. Diesem zufolge würde der Lehrer seinen Schüler auffordern, folgendes auszuführen: Gib dir selbst oder deinen Mitschülern eine Anwendungsaufgabe im Kopfrechnen über die Addition, oder über die Subtraction, Multiplication ꝛc., in der die Addition, und Subtraction ꝛc. vereinigt vorkommen. Auch kann er ihn auffordern, sich selbst oder seinen Mitschülern beliebige Anwendungsaufgaben mit Brüchen zu geben. Hat der Lehrer mehrere Schüler, so versteht es sich, daß er bald diesen, bald jenen abwechselnd auffordert, Aufgaben unter diesen Bestimmungen zu bilden. Den Schüler also zu führen, daß er die Stelle des Lehrers in dem, was er sich eigen gemacht hat, vollkommen zu ersetzen im Stande ist, wird, wenn dieser Grundsatz in's Leben versetzt werden soll, nicht aus den Augen verloren werden müssen. Die

Sache auch von einem andern Standpunkt aus erwogen, wird es von der höchsten Wichtigkeit, daß der Schüler hierin zu einer hohen, freyen und selbstständigen Thätigkeit erhoben werde. Denn er soll nicht nur in sich aufnehmen, was ihm der Lehrer giebt, um sich dieses geistig zu seinem wahren Eigenthum zu machen, sondern er muß eben so zum Geben und Mittheilen gebildet und erhoben werden. Der gegenseitige Unterricht darf, wenn er einst in seine wahre Bedeutung zurückgeführt seyn wird, nicht mehr blos als ökonomisches Erleichterungsmittel einen Werth haben, sondern er soll einst als ein tief psychologisches Bildungsmittel seine Rechte behaupten. Das Kind zum Mittheilen dessen, was es wahrhaft besitzt, in Anspruch zu nehmen, führt unstreitig dahin, den Unterricht, so weit er in's Heiligthum des häuslichen Kreises einzuführen möglich ist, auch wirklich einzuführen. Vater und Mutter werden dadurch einst in hoher Vollendung ihren Kindern im Unterricht das geben können, was sie selbst besitzen. Der ältere oder gebildetere Bruder und die gebildetere Schwester werden dann zumal nicht weniger tüchtig und brauchbar werden, ihren jüngern oder weniger gebildeten Geschwistern mitzutheilen und zu geben, was ihnen die Schule schon in ihrer Jugend gab. Soll die Schule wirklich bildend in's Leben eingreifen, und das Leben hinwieder dem Schulunterricht ein wahres Fundament geben; so finden sich hier die wahren Anfangs- und Anknüpfungspunkte. Die Schule und das Leben sind in unsern Tagen nicht nur getrennt, sondern sie werden in mehrern Richtungen sogar einander entgegenwirkend behandelt und öfters so weit von einander entfernt, daß jedes seine Bahn, ohne Rücksicht auf einander zu nehmen, verfolgt und besonders von nützlichen, wohlthätigen und bildenden, gegenseitigen Einflüssen keine Spur zu finden ist. Hundertfältige Erfahrungen haben außer Zweifel gesetzt, daß das Kind von seiner frühesten Jugend an, wo man es immer bedarf, in ökonomischer Hinsicht eine Stütze seiner Familie, aber noch weit leichter eine Stütze der Erziehung und Bildung in derselben werden kann. Auch führt diese Benutzung des Kindes unendlich weiter, als dieses durch ökonomische Hülfe selbst möglich ist. Aus diesem geht weiter hervor, daß im Familienkreis, in seinem Verband und in seinem Leben Mittel für die Schule liegen, die sich auf keinem andern Wege ersetzen lassen, und eben so, daß die Schule auf eine Weise bildend auf das häusliche Leben einwirke, die dasselbe erst recht zum Segen unsers Daseyns macht. Doch auch dieses wird durch die Reihenfolgen und Uebungen, die weiter unten folgen, noch mehr in's Licht gesetzt werden. Ich kehre deßwegen zu den Uebungen und Aufgaben, die bis jetzt als Kopfrechnungsaufgaben angewandter Zahlen aufgestellt worden sind, zurück und führe das Nämliche auch noch für's Zifferrechnen hier an.

Was beym Kopfrechnen mit sehr kleinen oder niedern Zahlen statt gefunden hat, muß beym Zifferrechnen nur auf höhere Zahlen ausgedehnt werden; und es kommen daher alle Aufgaben, die oben angeführt worden, unter diesem zweyten Gesichtspunkt noch einmal zum Vorschein. Mehr aber als etwa 6 bis 8 Stunden hierauf zu verwen=

den, wird auf keinen Fall nothwendig; so viel Zeit man auch auf die mechanische Ausführung ähnlicher Aufgaben zu verwenden nöthig erachten sollte.

Addition.

Es fragt sich, wie viel 1467 fl. 48 kr. 3 hll., 24,964 fl. 39 kr. 4 hll. und 29,664 fl. 53 kr. 4 hll. zusammen geben werden?

Auf die nämliche Weise kann man sie selbst die Addition auf andere Anwendungsgegenstände übertragen lassen, ohne daß sich irgend eine Schwierigkeit mehr zeigt, die es nicht mit Leichtigkeit zu überwinden im Stande ist. Der Lehrer wird aber immer wohlthun, wenn er den Schüler auf dieser Stufe für seine Mitschüler auf eine geeignete Weise in Thätigkeit setzt, ihn hiefür benutzt und auch diese Seite in ihm ausbildet.

Subtraction.

Von 3640 Zentnern, 47 Pfund und 2 Loth sollen 2949 Zentner, 49 Pfund und 3 Loth abgezogen werden; es fragt sich, wie viele Zentner, Pfund und Loth dann noch bleiben?

Von 3678 Klaftern, 2 Schuh, 1 Zoll und 2 Linien hat man eine gewisse Anzahl Klafter, Schuh, Zoll und Linien so abgezogen, daß noch 2484 Klafter, 5 Schuh, 4 Zoll und 3 Linien bleiben; es fragt sich, was abgezogen worden?

Nimmt der Schüler Anstand, obige, also gestellte Frage zu lösen; so ist dieses ein Zeichen, daß er sich in seiner geistigen Bildung nicht auf der Stufe befindet, die bey ihm mit vollem Recht vorausgesetzt wird. Die kleinere Zahl von der größern abgezogen, wird die zu suchende Summe Klafter, Schuh ꝛc. geben, weil diese Operation auch in diesem Fall anzeigt, um wie viel die eine größer ist als die andere.

Multiplication.

Es verdient jemand in einem Tag 2 fl. 36 kr 4 hll.; wie viel wird er in 2 Jahren, 1 Monat, 3 Wochen und 3 Tagen verdienen?

Wenn ein Pfund 2 fl. 30 kr. 3 hll. kostet, was werden 284 Pfund, oder wie viel werden 3 Zentner und 3 Pfund kosten?

Wie viele Heller machen 20 Louisd'or, 3 Gulden, 36 Kreuzer und 4 Heller?

Eine bedeutende Anzahl Aufgaben ist auch hier nicht nothwendig, so gerne sich der Schüler solchen Untersuchungen auch widmet. Durch die Lust und Freude, die er der einen oder andern Aufgabe gerne schenkt, muß man sich nicht bestimmen lassen, mehr Zeit darauf zu verwenden.

Division.

Es besitzt eine Familie 3484 fl. 36 kr. 3 hll., und braucht jede Woche 4 fl. 48 kr. 7 hll.; es fragt sich, wie viele Wochen sie an dieser Summe haben werde?

Auch kann man fragen: wie viele Jahre und Wochen sie daran habe ꝛc. Alle Beyspiele der Multiplication finden auch hier ihre volle Anwendung.

Arithmetisches Verhältniß.

Wenn jemand den ersten Tag des Jahres 1 kr. und 3 hll. verdient, jeden künftigen Tag aber 7 hll. mehr als am vorhergehenden Tag, wie viele Gulden, Kreuzer und Heller wird er dann am letzten Tage des Jahres verdienen?

Es unterliegt keinem Zweifel, daß auch über das geometrische Verhältniß ähnliche Aufgaben aufgestellt werden können. Ebenso wird jedermann die allfällige Ausführung dieser Ansicht, in so fern sie als nothwendig erachtet wird, ohne Schwierigkeit unternehmen können. Ganz auf die gleiche Weise können Aufgaben, die Brüche enthalten, in diesem Geist und in dieser Form gegeben werden. Wird aber der Lehrer den hier aufgestellten Gang befolgen, so ist nicht nur jeder Lehrer und Erzieher im Stande, dieses ohne weitere, positive Ausführung zu ergänzen; sondern jeder Schüler wird ohne bedeutende Hülfe des Lehrers fähig werden, das Nämliche zu thun. Daß die Addition mit der Subtraction oder mit der Multiplication 2c., und zwar mit Einheiten und Brüchen, verbunden werden kann, geht so einleuchtend aus diesem hervor, daß auch hier eine weitere Ausführung ohne Schwierigkeiten nicht nur von jedem Lehrer, sondern selbst von den bessern seiner Schüler verwirklicht werden kann. Steht der Schüler im Kopf- und Zifferrechnen einmal auf dieser Stufe, so kann der Lehrer dieses Angefangene in jeder Richtung weiter fortsetzen. Ich knüpfe den abgebrochenen Faden des Kopfrechnens hier wieder an, und zwar an die arithmetische Vergleichung, in welcher das nichts als der Mittelpunkt zwischen den negativen und positiven Größen in's Auge gefaßt werden muß.

Sollen die Zahlverhältnisse in der Wirklichkeit negativ und positiv dargestellt werden, so kann man sie auch durch die Linie veranschaulichen. Wirkliche Körper sind aber geeigneter, die negativen und positiven Verhältnisse der Zahl und aller Größenverhältnisse auszudrücken, als es die Linie ist. Ist die Geisteskraft und das Abstractionsvermögen im Kinde genugthuend entwickelt worden; so fällt das Bedürfniß, die negativen Größenverhältnisse durch sinnliche Anschauung weitläufig begründen zu wollen, ganz weg. Selbst die negative Größe ist ein abstrakter Begriff, und muß, in so fern man dieses sinnlich anschaulich begründen will, im gleichen Moment wieder zur Abstraction zurückkehren. Auf diese Ansicht gestützt, werden die negativen Zahlverhältnisse bey einem Schüler, der in seiner Bildung so weit vorgerückt ist, daß solche Uebungen mit Erfolg angefangen werden dürfen, also betrieben:

Der Lehrer sagt zu seinem Schüler, er soll sehen, welche Zahl man von 1, 2, 3, 4 ꝛc. wegthun (abziehen) müsse, wenn jedesmal nichts bleiben soll? Hernach, welche Zahlen man von 1 nicht wegthun könne? Die Antwort wird seyn: 2, 3, 4 ꝛc.

Wenn man 2, 3, 4 ꝛc. von 1 wegthun sollte, wie viel müßte mehr weggethan werden, als möglich ist? Antwort: wenn man 2 von 1 wegthun sollte, so müßte 1 mehr weggethan werden, als möglich ist, es würde 1 fehlend bleiben, oder 1 weniger als nichts, oder es würde 1 fehlen, bis man sagen könnte, es bleibe nichts. So wird das Nämliche bis auf 3, 4 ꝛc. auf die gleiche Weise fortgesetzt. Ist ihm diese, auf obige Weise ausgedrückte Reihenfolge deutlich, so fährt der Lehrer fort und sagt dem Schüler: eine solche fehlende Zahl nenne man eine negative Zahl; die wirkliche Zahl aber, um sie von dieser zu unterscheiden, eine positive. Einzelne Fragen mögen dieses negative Verhältniß der Zahl in ein noch heiteres Licht setzen.

Fr. Wie viel müßte man von 20 wegthun, wenn 1, 2, 3 ꝛc. weniger als nichts, oder 1, 2, 3 ꝛc. negativ bleiben sollte?

Man hat eine Zahl von einer andern weggethan, und es bleibt 1 weniger als nichts oder 1 negativ; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey? Antwort: 2 von 1, 3 von 2, 4 von 3 ꝛc. weggethan, bleibt immer 1 negativ oder 1 weniger als nichts.

Nachdem der Begriff von negativen Zahlen im Schüler entwickelt worden, kann der gleiche Gang, den ich in der Zahlenlehre aufgestellt habe, auch auf die negativen Verhältnisse der Zahl angewandt werden.

Addition der negativen und positiven Zahlen.

Der Lehrer trägt dem Schüler auf, zu untersuchen, wie viel er erhalte, wenn er zu 1 weniger als nichts oder zu 1 negativ, 1, 2, 3, 4 ꝛc. hinzusetze. (Wird bey 1, 2, 3 ꝛc. nicht gesagt, daß es negative Zahlen seyen; so wird verstanden, daß es positive sind.) Antwort: zählt man zu 1 negativ eins hinzu; so erhält man nichts, denn 1 hebt 1 negativ auf, oder man muß 1 positiv haben, wenn man das negative eins so aufheben will, daß nichts mehr bleibt; zählt man 2 hinzu, so erhält man aus dem gleichen Grunde 1; bey 3 aber 2 ꝛc.

Siehe, wie viel du erhältst, wenn du zur Zahl dreißig, 20, 21, 22 ꝛc. negativ hinzuzählst? Antwort: 10, 9, 8 ꝛc.; denn von den 30 werden durch 20 negativ auch 20 aufgehoben und es bleiben also noch 10. So kann man den Schüler noch negative Zahlen zu negativen Zahlen addiren lassen.

Subtraction mit negativen Zahlen.

Man untersucht, wie viel bleibe, wenn von 1 negativ, 1, 2, 3, 4 ꝛc. weggethan oder abgezogen werde, und der Schüler wird für den ersten Fall 2 negativ, für den zweyten aber 3 negativ ꝛc. finden; denn wenn man von einer Zahl etwas wegthut, so bleibt um das weniger als die Zahl ausmacht, die man wegthut; wird also 1 von 1 negativ weggethan, so bleibt 1 weniger als schon da ist, demnach 1 negativ, in allem wird es aber 2 negativ ausmachen.

Wie viel bleibt, wenn man von der Zahl eins, 10, 11 negativ abzieht? Antwort: es bleiben 11, 12 ꝛc.; denn je weniger man von einer Zahl wegthut, desto mehr bleibt; in dem Zustand, in dem nichts weggethan wird, bleibt die Zahl wie sie ist und macht 1, werden aber noch 10 weniger als nichts weggethan, so bleibt auch 10 noch mehr, und 1 ist die Zahl schon, folglich macht es in allem 10 und 1 oder 11.

Diese zwey Beyspiele beweisen, daß jede Aufgabe, die bey der Subtraction gegeben worden ist, mit negativen Zahlverhältnissen gelöst werden kann. Das Gleiche könnte man auch auf die Multiplications- und Divisionsform ausdehnen und anwenden. Da aber von hier aus die Potenzen oder die Zahlen im 2ten, 3ten Grad ꝛc. ihren Anfang nehmen, folglich den Schüler unmittelbar auf eine vorgerücktere Stufe führen, so wird dieses übergangen; dagegen wird zur arithmetischen Vergleichung der Zahl in ihren negativen Verhältnissen geschritten.

Lehrer. Untersucht, was der Unterschied zwischen 1 negativ und 1, 2, 3, 4 ꝛc. sey? Antwort: Für den ersten Fall 2, für den zweyten 3 ꝛc.; denn von eins weniger als nichts bis zu nichts selbst, ist eins, und von nichts bis zu 1 noch einmal eins, also unterscheidet sich eins negativ und eins um 2 von einander, oder ihr Unterschied ist 2.

Um wie viel ist 20 mehr als 10 negativ? Antwort: um 30; denn 20 ist um 20 mehr als nichts, und nichts ist um 10 mehr als 10 weniger als nichts, folglich in allem um 30 mehr als 10 negativ.

Der Unterschied zwischen einer negativen und einer positiven Zahl ist 3; es fragt sich, was dieses für zwey Zahlen seyen? Antwort 1 negativ und 2, oder 2 negativ und 1.

Geometrische Vergleichung zwischen negativen und positiven Zahlen.

Zwanzig ist um 2 $^1/_2$ mal 20 mehr als welche Zahl? Antwort: als 30 negativ; denn die Größe von 20 zwey und ein halbes mal genommen, ist 50; sie enthält aber 20 nur einmal, und der Rest bis auf 50, der 30 ist, muß negativ seyn.

Zwanzig negativ ist aber um 2 ½ mal 20 weniger als welche Zahl? Antwort: als 30. Die Auflösung ist derjenigen der letzten Aufgabe so ähnlich, daß die nämlichen Gründe auch hier ihre volle Anwendung finden.

Aehnliche Uebungen und Reihenfolgen können auch auf die Brüche ausgedehnt werden, welches aber in keinem Fall nothwendig ist; denn wenn dem Schüler die negativen und positiven Verhältnisse der Zahl klar und einleuchtend sind, so werden sie es ihm auch bey den Brüchen und Bruchverhältnissen seyn. Die Brüche dürfen dem Schüler nicht erst durch negative Größen klar gemacht werden, und eben so wenig werden dem Schüler durch die negativen Zahlverhältnisse die Brüche deutlich gemacht werden dürfen. Als Uebungen des Zifferrechnens müssen diese Aufgaben ebenfalls nicht weiter ausgeführt werden. Hingegen ist die Entwickelung der positiven und negativen Größenverhältnisse für die Zahl, als allgemeine Größe in's Auge gefaßt, von der höchsten Wichtigkeit. Rücksichtlich der Nothwendigkeit der Behandlung der Zahl als allgemeine Größe, darf ich mich kurz fassen, wenn man erwägt, daß unter anderm die Algebra nichts anders als eine allgemeine Zahl- und Größenlehre ist. Will man diese Wissenschaft nothwendig und naturgemäß begründen, so muß sie sich an das, was ich bis jetzt als Kopfrechnungsübungen wirklich aufgestellt habe, unmittelbar anschließen. So wie die Kopfrechnungsübungen eine wichtige Stelle einnahmen; so wird dieses ganz vorzüglich in der Fortsetzung wichtig werden. Durch die Darlegung der Uebungen wird dieses aber in ein so heiteres Licht gesetzt, daß ich die Grundsätze, auf denen das Ganze beruht, von keiner Seite zu wiederholen für nothwendig erachte, besonders wenn man die hier unten folgenden Uebungen mit den bereits vielseitig aufgestellten Grundsätzen in Zusammenhang bringt. Alles, was ich bisher diesfalls gesagt habe, hat auch in dem, was sogleich folgen wird, seine volle Anwendung. Sollte irgend ein Grundsatz in der vorrückenden Ausführung eine Abänderung erleiden, so werde ich nicht ermangeln, an Ort und Stelle hievon Kenntniß zu geben. Die Entwickelung der geistigen Anlagen durch die Zahl ist auch hier, als auf einer höhern Stufe stehend, noch immer Hauptsache, und der daselbst aufgestellte Gang wird für diesen Endzweck ganz befolgt werden müssen. Eine unbekannte Zahl als allgemeine Größe auf die mannigfaltigste Weise mit einer, zwey und mehrern bekannten Zahlen und mit ihr selbst so in Verhältnisse zu setzen, daß jeder Schüler dieselbe zu finden im Stande ist, wird der Anfang dieser Darlegung der Zahlverhältnisse seyn. Die höchste Ungleichheit unter die Form der Gleichheit bringen zu können, wird der wesentlichste Typus, durch den alle diese Verhältnisse in ihre einfachsten Bestandtheile zurückgeführt und gelöst werden können. Die Grundlage, auf der dieses geistige Band ruht, drückt sich unter folgender Norm aus: Eine jede Zahl oder Größe ist sich selbst oder einer andern Zahl oder Größe gleich, die so groß ist, als diese Zahl, und eben so verhält es sich mit ihren Theilen, als: die Hälfte wäre gleich der Hälfte, $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ rc.; das Gleiche findet endlich mit der Verdoppelung und Verdreyfachung statt. Gestützt auf diese Grundlage kann eine unbekannte Zahl unter der Additionsform mit bekannten in Gleichheit gesetzt werden.

Um dem Lehrer einen schnellen, sichern und genugthuenden Ueberblick nicht nur über diese, sondern auch über alle folgenden Uebungen zu geben, werde ich die hiebey zu befolgende Norm ohne Unterbrechung nach einander aufstellen, und diesem noch beyfügen, daß diese auch überall zu befolgen ist, wo es sich immer um Reihenfolgen handelt.

Fr. Eine unbekannte Zahl ist gleich 1, 2, 3 rc.; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Der Kürze halber also ausgedrückt:

a) 1 unbekannte Zahl = 1, 2, 3 rc., welches ist die unbekannte Zahl?

b) 2 und mehrmal 1 unb. Zahl = 1, 2, 3 rc., welches ist die unb. Zahl?

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ rc. einer unb. Zahl = 1, 2, 3 rc., welches ist die unb. Zahl?

d) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ rc. einer unb. Zahl = 10, 11, 12 rc., welches ist die unb. Zahl?

e) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$ rc. einer unb. Zahl = 10, 11, 12 rc., welches ist die unb. Zahl?

f) $1\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$ rc. einer unb. Zahl = 10, 11, 12 rc., welches ist die unb. Zahl?

Brüche bey den bekannten Zahlen 10, 11, 12 rc. an=

geben zu wollen, bietet nicht nur nichts Neues dar, sondern ist bey den Kopfrechnungsübungen mit Brüchen so vielseitig und genugthuend eingeübt worden, daß eine weitere Ausführung hier nur Zeitverlust wäre; also wo immer Brüche zu bekannten Zahlen zu stehen kommen, darf dieses auf der gegenwärtigen Stufe auch gänzlich wegbleiben.

g) 1 unbekannte Zahl + 10 = 30, 40, 50 ꝛc., welches ist die unbekannte Zahl?

h) 2 und mehrmal 1 unb. Zahl + 10 = 40, 50, 60 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?

i) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ꝛc. einer unb. Zahl + 10 = 40, 50 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?

k) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ꝛc. einer unb. Zahl + 10 = 40, 50, 60 ꝛc. welches ist die unb. Zahl?

l) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$ ꝛc. einer unb. Zahl + 10 = 30, 40 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?

m) $2\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$ ꝛc. einer unb. Zahl + 10 = 30, 40 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?

n) die Zahl 10 + eine unb. Zahl = 2 oder 3mal ꝛc. die unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

o) die Zahl 10 + eine unb. Zahl = $2\frac{1}{2}$mal, $2\frac{1}{3}$mal die unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

p) die Zahl 10 + $\frac{1}{2}$ unb. Zahl = 2, 3mal ꝛc. die unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

q) die Zahl 10 + $\frac{2}{3}$ unb. Zahl = 2, 3 mal ꝛc. die unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

r) die Zahl 10 + $1\frac{1}{2}$ mal die unb. Zahl = 2, 3 mal ꝛc. die unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

s) die Zahl 10 + $2\frac{1}{2}$mal die unb. Zahl = 3, 4mal ꝛc. die unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

t) die Zahl 10 + $2\frac{1}{2}$ mal die unb. Zahl = $3\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{5}$ mal ꝛc. die unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

u) die Zahl 10 + 2 mal unb. Zahl = 1 und 3 mal unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

v) die Zahl 10 + $\frac{1}{2}$ mal unb. Zahl = $1\frac{3}{4}$ mal unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

w) die Zahl 10 + $2\frac{1}{2}$ mal unb. Zahl = 4 und $3\frac{1}{3}$ mal unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

Auch kann eine bekannte und unbekannte Zahl noch mit ihr selber mehr einer unbekannten auf gleiche Weise in Gleichheit gesetzt werden, welches aber nicht nothwendig ist, wirklich ausgeführt zu werden, wenn der Schüler sich diese Reihenfolge in ihrem ganzen Zusammenhang eigen gemacht haben wird. Mit noch mehr bekannten Zahlen eine unbekannte Zahl in Gleichheit zu setzen, wird aber auf dieser Stufe ganz entbehrlich und wäre höchstens als eine Combination anzusehen. Unter den nämlichen Verbindungen und Abwechselungen können auch die negativen Zahlen in ein Verhältniß mit einer unbekannten Zahl gesetzt werden; da aber ähnliche Reihenfolgen noch bey der Subtraction vorkommen, so werde ich die Zahl unter diesem Gesichtspunkt darzulegen an dieser Stelle übergehen, und nur zeigen, wie obige Reihenfolgen mit den Schülern eingeübt werden müssen. Sinnlich anschaulich dürfen auch hier die Zahlverhältnisse nicht mehr dargestellt werden. Alle Reihenfolgen und ihre gefundenen Resultate müssen mit Ziffern auf der Schiefertafel nur so aufgezeichnet werden, wie ich es beym Kopfrechnen mit Brüchen umständlich erläutert habe. Die Ziffern dürfen für diesen Fall aber nur als ein Aushülfs- und Erleichterungsmittel für das Gedächtniß benutzt werden. Aehnliche Aufgaben als Beyspiele für das Zifferrechnen benutzen zu wollen, wird aber ganz überflüssig seyn. Wird der Schüler in den so eben aufgestellten Reihenfolgen von Uebungen lückenlos weiter geführt, so darf man mit aller Sicherheit annehmen, er werde dadurch in den Stand gestellt, jede Reihenfolge und auch jede einzelne Aufgabe zu lösen. Damit aber der weniger geübte Lehrer ausführlich und wörtlich die praktische Einübung dieser Reihenfolgen zu kennen Gelegenheit finde, werde ich dem Gesagten noch einige Auflösungen beyfügen.

Auflösungen.

a) Ist eine unbekannte Zahl gleich eins, so ist diese Zahl so viel als eins.

b) Wenn zweymal eine Zahl gleich ist eins, so wird einmal dieselbe, die die Hälfte von zweymal der unbekannten ist, auch die Hälfte von 1 oder ½ seyn.

c) Wird aber die Hälfte einer unbekannten Zahl 1 betragen, so ist die ganze Zahl $2 \times 1 = 2$.

d) Sollen ⅔ einer solchen Zahl 10 betragen, so kömmt auf ⅓, der die Hälfte von ⅔ ist, auch die Hälfte von 10 oder 5, und die ganze Zahl, die drey Drittel hat, ist $3 \times 5 = 15$.

e) Kommen auf 1½ mal eine unbekannte Zahl aber 10, so wird auf ½ dieser Zahl, welches ⅓ von 1½ mal derselben ist, auch ein Drittel von 10, oder $3\frac{1}{3}$ kommen; die ganze Zahl hat aber 2 Halbe, also $2 \times 3\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$.

f) $1\frac{2}{3}$ einer unbekannten Zahl machen 10, folglich kommt auf einmal die Zahl $\frac{3}{5}$; denn ein Ganzes hat $\frac{3}{3}$, und $1\frac{2}{3}$ haben $\frac{5}{3}$, und $\frac{3}{3}$ sind von $\frac{5}{3}$ dreymal der 5te Theil; also auch 3 mal der 5te Theil von 10; ein Fünftel von 10 beträgt 2, und 3 solcher Theile machen 6.

g) Wenn eine unbekannte Zahl mehr 10, dreyßig beträgt, so kommt auf die unbekannte Zahl mit 10 erst 30; 10 sind also in 30 und in der unbekannten Zahl und 10 enthalten; 10 von 30 und von der unbekannten Zahl weggethan, bleiben für die unbekannte Zahl noch 20.

h) Sind 2 mal eine unbekannte Zahl mehr 10 gleich 40, so muß zum Doppelten der Zahl 10 gesetzt werden, bis sie 40 wird; setzt man aber keine 10 hinzu, so wird sie um 10 weniger als 40 oder 30 werden, und die einfache Zahl ist die Hälfte von der doppelten, oder die Hälfte von $30 = 15$.

i) Wenn die Hälfte einer Zahl mehr 10 vierzig beträgt, so ist die Hälfte um 10 weniger als 40 oder 30; und wenn die Hälfte 30 ausmacht, so ist das Ganze 2 mal $30 = 60$.

k) Werden $\frac{2}{3}$ einer unbekannten Zahl mehr 10, vierzig machen, so sind diese $\frac{2}{3}$ um 10 weniger als 40 oder 30, und wenn $\frac{2}{3}$ dreyßig sind, so wird auf $\frac{1}{3}$ die Hälfte von $30 = 15$ kommen, und die ganze Zahl hat $\frac{3}{3}$, also $3 \times 15 = 45$.

l) Kommt auf $1\frac{1}{2}$ mal eine unbekannte Zahl mehr 10, dreyßig, so wird auf $1\frac{1}{2}$ mal dieselbe 10 weniger als

30 oder 20 fallen, und auf einmal die Zahl $\frac{2}{3}$ von 20; denn ein Ganzes ist von $1\frac{1}{2}$ zweymal der dritte Theil, und $\frac{2}{3}$ von $20 = 13\frac{1}{3}$.

m) $2\frac{3}{4}$ einer unbekannten Zahl und 10 machen 30, also sind die $2\frac{3}{4}$ dieser Zahl um 10 weniger als 30, oder 20; betragen aber $2\frac{3}{4}$ einer Zahl 20, so kommt auf einmal die Zahl $\frac{4}{11}$ dieser Summe, denn ein Ganzes hat $\frac{4}{4}$, die von $2\frac{3}{4}$ machen $\frac{11}{4}$, und $\frac{4}{4}$ sind $\frac{4}{11}$ von $\frac{11}{4}$, es müssen daher $\frac{4}{11}$ von 20 genommen werden, welches $7\frac{3}{11}$ macht.

Nach dieser Begründung bin ich sicher, daß jede der noch folgenden Aufgaben bis zu w ohne die geringste Schwierigkeit auch von den schwächern Schülern gelöst werden kann. Sollte dieses aber der Fall nicht seyn, so wird eine sehr ausgedehnte Ausführung obiger Reihenfolgen nothwendig werden, die aber in dem oben aufgestellten Typus gewiß nach dem Bedürfniß eines jeden ausgedehnt werden kann. Ist auch hier immer nur eine Aufgabe gelöst worden, so versteht es sich, daß dem Schüler nach Bedürfniß zwey, drey und noch mehr Aufgaben von einer Art gegeben und von ihm gelöst werden können. Man hat sich auch hier, wie überall, genau nach dem Bedürfniß des Schülers zu richten. Wird er mit Leichtigkeit von einer Aufgabe zur andern übergehen, so wird die oben aufgestellte Reihenfolge nicht nur hinlänglichen Stoff geben, sondern die Reihenfolgen, die überall angedeutet worden sind, müssen in diesem Fall als ganz überflüssig angesehen und behandelt werden. Auch habe ich früher bemerkt, daß das laute Zusammensprechen und alles, was die sinnliche Anschauung zu begründen geeignet ist, besonders ge=

schickt ist, die sinnliche Anschauung zu begründen, daß aber diese in dem Grad wegfällt, als die geistige Anschauung anfängt, diese Stelle einzunehmen. Daß hier dieses ganz der Fall ist, unterliegt keinem Zweifel mehr. Folglich muß das laute Zusammensprechen, und wenn es auch in den zweckmäßigsten Abtheilungen geschieht, hier sehr abgekürzt werden, und wenn die Schüler sehr kräftig sind, ganz wegfallen. Für diesen Fall wird sich der Lehrer begnügen, ähnliche Reihenfolgen, wie die letzten sind, den Schüler mit Ziffern auf seiner Schiefertafel vormerken, aufschreiben oder aufzeichnen zu lassen, und jeden einzelnen derselben für sich im Stillen im Kopfe auszurechnen anhalten. Versteht sich, daß die gefundenen Resultate, wie ich früher schon gezeigt habe, ebenfalls von jedem von ihnen auf seiner Schiefertafel vorgemerkt werden müssen. Daß diese Zifferbemerkungen nichts weiter als dem Gedächtniß zu Hülfe zu kommen haben, ist aus den früher aufgestellten Grundsätzen umständlicher nachzusehen. Um zu untersuchen und zu prüfen, ob ein jeder Schüler richtig gerechnet habe, kann der Lehrer einen von ihnen auffordern, die gefundenen Resultate laut anzugeben, und die andern wieder durch Aufhebung der Hände anzeigen lassen, ob die Resultate ihrer Aufgabe mit dem, der laut spricht, in Uebereinstimmung stehen. Auch kann er die Aufhebung der Hand nur auf solche ausdehnen, deren Resultate nicht mit dem übereinstimmen, welcher sie laut herunter liest. Daß er bald diesen, bald jenen Schüler auffordern sollte, seine gefundenen Resultate laut für seine Mitschüler auszusprechen, versteht sich von selbst, und das, was ich in Hinsicht der Abwechselung im Anfange dießfalls aufstellte, ist auch hier in seinem ganzen Umfange noch anwendbar und wahr. Aus den vorgelegten Reihenfolgen geht ferner hervor, daß zu keinen hohen Zahlen oder verwickelten Bruchverhältnissen geschritten werden kann. Niedere Zahlverhältnisse müssen um der geistigen Entwickelung der Kräfte willen für den Schüler auch auf dieser Stufe noch fortwährend erhalten werden.

Eine unbekannte Zahl mit bekannten Zahlen durch die Subtractionsform dargestellt.

Alle Beyspiele, die in der Addition als Norm aufgestellt worden sind, bilden folgende Fragen als die erste Grundlage, auf welche die Subtraction zurückgeführt werden wird.

Fr. Wenn man von einer unbekannten Zahl 10 wegthut und nichts mehr bleibt, so fragt es sich, wie viel diese Zahl sey?

Ferner, wenn man von der Hälfte einer unbekannten Zahl 10 wegthut und nichts mehr bleibt, wie viel wird sie seyn?

Wenn man aber von ⅔ dieser Zahl 10 wegthut und nichts mehr bleibt, wie viel mag sie seyn?

Und so kann dieses auf jedes Beyspiel, das in der Addition aufgestellt worden ist, ausgedehnt werden. Ich halte den Typus dieser Reihenfolgen fest, weil er gleichsam als Muster für alle künftigen Reihenfolgen gleich im Anfang aufgestellt wurde, und schreite zu den Aufgaben, die nicht mehr durch nichts, welches gleichsam als der

Mittelpunkt aller negativen und positiven Größen angesehen werden muß, sondern durch eine bestimmte Zahl in der Subtractionsform ausgedrückt werden. Die in der Additionsform aufgestellten Reihenfolgen mögen auch hier eine volle Anwendung finden.

Von einer unbekannten Zahl wird 10 weggethan, und es bleibt noch 20; es fragt sich, welches diese Zahl sey? Abgekürzt auf folgende Weise ausgedrückt:

a) eine unbekannte Zahl — 10 = 20, 30 ꝛc., welches ist die unbekannte Zahl?
b) 2 und mehrmal eine unb. Zahl — 10 = 20, 30 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?
c) ½, ⅓ ꝛc. einer unb. Zahl — 10 = 20, 30 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?
d) ⅔, ¾ ꝛc. einer unb. Zahl — 10 = 20, 30 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?
e) 1⅓, 2⅔ einer unb. Zahl — 10 = 20, 30 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?
f) eine unb. Zahl — 20 = — 1 (oder 1 negativ), welches ist die unb. Zahl?
g) 2 und mehrmal eine unb. Zahl — 20 = — 1, 2 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?
h) ½, ⅓ ꝛc. einer unb. Zahl — 20 = 1, 2 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?
i) ⅔, ⅘ ꝛc. einer unb. Zahl — 20 = — 1, 2 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?
k) 1⅓, 3¼ ꝛc. einer unb. Zahl — 20 = — 1, 2 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?

l) eine unb. Zahl — 10 = — 20, 30 ꝛc., welches ist die unb. Zahl?

Alle Abänderungen von f bis k können auch mit dieser letzten Aufgabe statt finden; in den Resultaten wird hier die unbekannte Zahl negativ statt positiv werden; worüber nur die spätern Auflösungen deshalb nachgesehen werden können.

m) eine unbekannte Zahl — 10 = nichts, welches ist die unbekannte Zahl?

n) eine unb. Zahl — 10 = ½ unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

o) eine unb. Zahl — 10 = ⅔ unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

p) zwey unb. Zahlen — 10 = zwey unb. Zahlen, welches ist die unb. Zahl?

q) zwey unb. Zahlen — 10 = 1½ unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

r) eine unb. Zahl — 10 = — unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

Auch hier findet wieder die Reihenfolge von m bis q, und zwar nach einer doppelten Richtung, statt, entweder so, daß die unbekannte Zahl immer eine positive oder aber auch eine negative Zahl seyn kann.

Eine nothwendige Uebung für den Schüler wäre folgende: der Lehrer, der die Reihenfolgen bis auf diesen Punkt mit dem Schüler fortgesetzt hat, würde denselben auffordern, diese nämliche Reihenfolge ohne seine Hülfe und nur mit Wegweisung der Norm, die er sich bey der Addition eigen gemacht hat, bis zu ihrem Ende zu führen.

Alle seine Schüler werden freylich im erstenmal dieses nicht ohne die Handbietung des Lehrers vollenden können; dieses soll ihn aber dennoch nicht hindern, sie einen Versuch machen zu lassen. Sie werden es schnell und leicht erlernen. Alles, was das Kind immer zu lernen und sich eigen zu machen hat, geht anfangs nur sehr unvollständig von statten, wird aber durch die Uebung vollkommen und leicht. Ist jedoch der Schüler auf jeder Stufe zur thätigen Theilnahme und Mitwirkung seiner Mitschüler in dem Geist und in der Ausdehnung angeleitet, angehalten und benutzt worden, wie ich mich vielseitig in's Licht zu setzen bemühte; so ist es nothwendig, daß es geschehe, wenn er eben so zum Nehmen wie zum Geben gebildet werden soll. Es unterliegt keinem Zweifel, wie wichtig von diesem Standpunkt aus die letzten Reihenfolgen und Aufgaben, die durch den Schüler aufgestellt worden, für seine eigene Bildung werden, und nicht weniger klar ist es, daß diese Anforderung die Kraft des Schülers nicht übersteigt, in so fern nämlich eine richtige Anwendung der aufgestellten Grundsätze und ihrer Ausführungsmittel statt gefunden hat. Um den Schüler aber mit einiger Sicherheit dahin zu führen, wird man wohlthun, ihn die Aufgaben in obiger Reihenfolge mit abgekürzten Zeichen, wie es allenfalls hier geschehen ist, zuerst aufschreiben zu lassen und ihn dann auf die gewohnte Weise dieselben zu lösen und die Resultate mit Ziffern auf der Schiefertafel vorzumerken anleiten. Wird der Schüler aber dieses nicht ausführen können, so darf man annehmen, daß die Entwickelung seiner Geisteskraft den Grad der Stärke und Gewandtheit noch nicht erhalten habe, den man auf dieser Stufe mit vollem Recht von ihm fordern muß und fordern darf. Ein langsames Vorwärtsschreiten würde diesem Mangel und diesen Lücken nur sehr unvollständig abzuhelfen vermögen. Unter solchen Umständen wäre ein Rückschritt das Rathsamste und Beste, das gethan werden könnte.

Um aber den Lehrer auch in dieser Uebung mit den nöthigen Ausführungsmitteln zu versehen und ihm so weit an die Hand zu gehn, daß auch der weniger Geübte mit großer Leichtigkeit dieses auszuführen im Stande ist, kehre ich zur weitern Ausführung und Auflösung der obigen Aufgaben zurück.

a) Kann man von einer unbekannten Zahl 10 wegthun, und es bleiben dann noch 20, so ist die unbekannte Zahl 20 mehr als 10, folglich 30.

b) Wird aber von dem Doppelten der unbekannten Zahl 10 weggethan, und es bleiben noch 20, so enthält das Doppelte dieser unbekannten Zahl 20 mehr als 10 oder 30, und wenn das Doppelte einer Zahl 30 ist, so ist die einfache Zahl die Hälfte davon, oder 15.

c) Wenn man von der Hälfte einer unbekannten Zahl 10 wegthun kann und noch 20 bleiben, so kommt auf die Hälfte 20 mehr als 10 oder 30; und wenn die Hälfte einer Zahl 30 ausmacht, so beträgt die ganze Zahl 2 × 30 oder 60.

d) Sollte man von ⅔ einer unbekannten Zahl 10 wegthun können und noch 20 übrig bleiben, so wären die ⅔ um 20 mehr als 10 oder 30; betragen ⅔ einer Zahl 30, so kommt auf einen Drittel, weil er die Hälfte von zwey

Dritteln ist, auch der halbe Theil von 30 oder 15 und die ganze Zahl ist $3 \times 15 = 45$.

e) Ist von 1½ mal einer unbekannten Zahl 10 weggethan worden, und noch 20 geblieben, so kommt auf 1½ mal diese Zahl 20 mehr als 10 oder 30, und auf die ganze Zahl ⅔ von 30 oder 20; denn einmal die Zahl ist von 1½ mal derselben ⅔.

f) Sollte man von einer unbekannten Zahl 20 wegthun und 1 weniger als nichts oder 1 negativ bleiben, so ist durch das Abziehn oder Wegthun dieser Zahl nicht nur die Zahl selbst weggethan worden, sondern 1 mehr als dieselbe; folglich ist 20 eins mehr als die unbekannte Zahl; 20 ist 1 mehr als 19, die unbekannte Zahl wird also in diesem Fall 19 seyn.

g) Wird vom Doppelten einer unbekannten Zahl 20 weggethan und es bleibt noch 1 negativ; so ist durch diesen Abzug nicht nur die doppelte Zahl aufgehoben worden, sondern noch 1 mehr; also ist die doppelte Zahl 19 und die einfache die Hälfte von 19 oder 9½.

Alle Auflösungen bis zu l) sind der letzten ganz ähnlich, und können, wenn man diejenigen von a bis e einen Augenblick ansehn und sie als Leitfaden benutzen will, so gleich behandelt werden, daß man sicher seyn kann, daß auch der schwächere Schüler dieselben ohne Anstand zu lösen im Stande seyn wird.

m) Thut man von einer unbekannten Zahl 10 weg und bleibt nichts mehr, so hebt man durch dieses Abziehen die Zahl auf, also ist die unbekannte Zahl so groß als 10.

n) Wird aber von einer unbekannten Zahl 10 weggethan und es bleibt noch die Hälfte der Zahl, so hat man durch diesen Abzug von 10 nur die Hälfte dieser unbekannten Zahl aufgehoben; also ist die Hälfte derselben 10 und die ganze Zahl $2 \times 10 = 20$.

o) Soll beym Abziehn von 10 noch $\frac{2}{3}$ der unbekannten Zahl bleiben, so wird dadurch nur $\frac{1}{3}$ der Zahl aufgehoben; wenn $\frac{1}{3}$ einer unbekannten Zahl 10 beträgt, so ist die ganze Zahl 30.

So wird dieses bis q fortgesetzt werden.

r) Wird von einer unbekannten Zahl 10 weggethan und es bleibt noch diese Zahl weniger als nichts oder die unbekannte Zahl negativ, so ist durch diesen Abzug von 10 zuerst die Zahl aufgehoben worden und hernach dadurch, daß sie noch einmal weniger als nichts oder negativ geblieben ist, wurde sie noch einmal, also zweymal aufgehoben, folglich wird zweymal diese unbekannte Zahl 10 betragen und einmal dieselbe 5.

Eine weitere Ausführung und Auflösung wird hier um so entbehrlicher, als die Aufgaben in der Addition und auch die künftigen Probleme hierüber genugthuende Anleitung geben. Bevor aber zu den künftigen Uebungen geschritten werden darf, müssen noch einzelne Fragen, die aus diesen Reihenfolgen hervorgehen, an den Schüler gemacht und eben so muß derselbe aufgefordert werden, einzelne Fragen an seine Mitschüler zu richten; z. B. wie viel ist eine unbekannte Zahl, wenn man 20 von ihr wegthut und dann dreymal diese Zahl negativ bleibt? Wie viel wird sie aber seyn, wenn man von ihr 10 wegthut und noch die Hälfte dieser unbekannten Zahl und eins bleibt u. s. w.

Eine unbekannte Zahl durch die Multiplicationsform mit bekannten Zahlen in Gleichheit gesetzt.

Ich fasse auch hier den Gang, den ich bey der Addition und Subtraction befolgte, in's Auge, und lege die nämlichen Reihenfolgen auch wieder unter diesem Gesichtspunkte dem Schüler vor.

Eine unbekannte Zahl mit 1 oder 2 ꝛc. multiplicirt, giebt 40; es fragt sich, welches diese Zahl sey? Abgekürzt auf die gewöhnliche Weise ausgedrückt:

a) eine unbekannte Zahl (mit 2 multiplicirt) 2 × = 40, welches ist die unbekannte Zahl?

b) eine unb. Zahl ½ × = 40, welches ist die unb. Zahl?

c) eine unb. Zahl ⅔ × = 40, welches ist die unb. Zahl?

d) eine unb. Zahl 1½ × = 40, welches ist die unb. Zahl?

e) eine unb. Zahl + 10 mit 2 multiplicirt = 50, welches ist die unb. Zahl?

f) eine unb. Zahl + 10 mit ½ mult. = 50, welches ist die unb. Zahl?

g) eine unb. Zahl + 10 mit ⅔ mult. = 50, welches ist die unb. Zahl?

h) eine unb. Zahl + 10 mit 1½ mult. = 50, welches ist die unb. Zahl?

i) eine unb. Zahl — 10 mit 2 mult. = 50, welches ist die unb. Zahl?

k) eine unb. Zahl — 10 mit 1½ mult. = 50, welches ist die unb. Zahl?

l) eine unbekannte Zahl — 10 mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt = 50, welches ist die unb. Zahl?

m) eine unb. Zahl — 10 mit $1\frac{1}{2}$ mult. = 50, welches ist die unb. Zahl?

n) eine unb. Zahl — 30 mit 2 mult. = — 10, welches ist die unb. Zahl?

o) eine unb. Zahl — 30 mit $\frac{1}{2}$ mult. = — 10, welches ist die unb. Zahl?

p) eine unb. Zahl — 30 mit $\frac{2}{3}$ mult. = — 10, welches ist die unb. Zahl?

q) eine unb. Zahl — 30 mit $1\frac{1}{2}$ mult. = — 10, welches ist die unb. Zahl?

r) eine unb. Zahl — 30 mit 2 mult. = — unb. Zahl, welches ist die unb. Zahl?

s) eine unb. Zahl — 30 mit $\frac{1}{2}$ mult. = — unb. Zahl, welches ist sie?

t) eine unb. Zahl — 30 mit $\frac{2}{3}$ mult. = — unb. Zahl, welches ist sie?

u) eine unb. Zahl — 30 mit $1\frac{1}{2}$ mult. = — unb. Zahl, welches ist sie?

v) eine unb. Zahl — 30 mit 2 mult. = unb. Zahl, welches ist sie?

Dieses wird mit der positiven unbekannten Zahl eben so fortgesetzt werden, wie es bey den negativen geschehen ist.

a) Wird eine unbekannte Zahl durch die Multiplication von 2, vierzig werden, so ist durch die zweymalige Wiederholung der unbekannten Zahl das 40 entstanden;

also kommt auf die einfache Zahl die Hälfte von 40 oder 20.

b) Multiplicirt man eine unbekannte Zahl durch ½ und es entsteht dadurch 40, so ist durch eine halbmalige Wiederholung der unbekannten Zahl 40 entstanden; also die ganze Zahl 2 × 40 oder 80.

Die weitern Auflösungen bis d) sind diesen beyden ganz ähnlich.

e) Wenn eine unbekannte Zahl mehr 10 durch 2 multiplicirt 50 giebt, so muß in den 50 zweymal die Zahl und 2 mal 10 oder 20 enthalten seyn; macht aber 2 mal eine unbekannte Zahl und 20 fünfzig aus, so kommt auf einmal dieselbe nach der Additionsform 15.

Alle fernern Auflösungen bis auf h) sind dieser letzten wieder ganz gleich zu behandeln.

i) Soll eine unbekannte Zahl weniger 10 mit 2 multiplicirt 50 geben, so ist 2 mal diese unbekannte Zahl, weniger aber 2 × 10, fünfzig; folglich betragen 2 mal die unbekannte Zahl — 20, fünfzig, und auf einmal die unbekannte Zahl kommt nach der Subtraction dann 35.

Alle Auflösungen bis m) sind dieser letzten wieder ganz ähnlich zu behandeln.

n) Wird die unbekannte Zahl — 30 mit 2 multiplicirt, und erhält man 10 weniger als nichts oder 10 negativ, so ist durch die zweymalige Wiederholung der Zahl und der 30, zweymal die unbekannte Zahl und weniger 60 entstanden, und dieses macht 10 negativ. Nach der Subtraction ist diese unbekannte Zahl durch die fernere Auflösung 25.

Bis q) sind wieder die gleichen Auflösungen zu machen.

r) Wird die nämliche Zahl und die 30 negativ mit 2 multiplicirt und erhält man dadurch einmal die unbekannte Zahl negativ, so ist 2 mal die unbekannte Zahl weniger 60 gleich der unbekannten Zahl negativ. Die weitere Auflösung ist in den vorhergehenden Aufgaben nachzusehen. Auch sind bis u) sich wieder alle Auflösungen gleich.

v) Wird eine unbekannte Zahl weniger 30 mit 2 multiplicirt und erhält man noch die unbekannte Zahl, so ist 2 × die unbekannte Zahl — 60 noch gleich der unbekannten Zahl (versteht sich positiv). Die weitere Auflösung ist in der Addition nachzusehen.

Da ich bey der Addition und Subtraction die einzelnen Fragen nur vorübergehend behandelt habe, so werde ich bey der Multiplicationsform, die in sehr ausgedehnten Reihenfolgen aufgestellt worden ist, dieselben hier etwas mehr erweitern. Da aber die Auflösungen nicht mehr Bedürfniß sind, so werde ich, um jede Weitläufigkeit zu vermeiden, diesen einzelnen Fragen auch weiter keine andern beyfügen.

Fr. Welche unbekannte Zahl muß man mit ⅔ multipliciren, wenn man 30 erhalten soll.

Giebt es mehr als eine Zahl, die mit ¾ multiplicirt 30 geben wird.

Eine unbekannte Zahl weniger 30, die durch 1½ multiplicirt wird, giebt 50; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey?

Mit

Mit welcher Zahl muß 20 multiplicirt werden, wenn man ½ erhalten will?

Kann man durch die Multiplication jeden beliebigen Bruch finden, wie z. B. ⅓, ¼, ⅕, ⅔, ¾, ⅘ ꝛc.?

Welche unbekannte Zahl weniger 30 muß man mit ⅕ multipliciren, wenn diese unbekannte Zahl negativ herauskommen soll?

Der Lehrer sagt zu seinen Schülern: „Gebe ein jeder von euch seinem Mitschüler eine Aufgabe, doch aber so, daß sich ein jeder bemühe, eine neue zu bilden.“ Auch kann er die Schüler auffordern, folgende Abwechselungen in die Fragen hineinzubringen. Gebt Aufgaben, die sehr einfach und leicht, oder solche, die sehr verwickelt und schwer zu lösen seyn werden.

Eine unbekannte Zahl durch die Divisionsform mit bekannten Zahlen in Gleichheit gesetzt.

Die ganze Reihenfolge, so wie sie in der Multiplication aufgestellt worden, kann auch hier statt finden, und jeder Lehrer, wenn er diesen Typus vor sich nimmt, wird auch ohne allen Anstand die Aufgaben und Reihenfolgen, welche die Division darbietet, aufzustellen fähig werden. Ich begnüge mich daher, nur einzelne Fragen, die aus den aufzustellenden Reihenfolgen hervorgehen, in gedrängter Kürze hier anzuführen.

Fr. Es ist eine unbekannte Zahl mit 3 dividirt worden und man hat 80 erhalten, welches wird wohl diese Zahl seyn?

Auflösung. Eine unbekannte Zahl mit 3 dividiren, heißt untersuchen, wie oft 3 in derselben enthalten sey, oder den 3ten Theil davon nehmen; wird 3 in einer unbekannten Zahl 80 mal enthalten oder der 3te Theil davon 80 seyn; so ist die Zahl 80 × 3 unter der ersten Auflösungsform, und 3 × 80 unter der zweyten, in beyden Fällen 240.

Fr. Eine unbekannte Zahl mit ⅔ dividirt giebt 30; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Auflösung. ⅔ müssen in der unbekannten Zahl 30 mal enthalten seyn, also 30 × ⅔ in sich haben, welches $^{60}/_{3}$ oder 20 Ganze giebt.

Fr. Mit welcher Zahl muß 100 dividirt werden, wenn man ⅔ erhalten soll?

Die Auflösung ist der obigen gleich.

Fr. Eine unbekannte Zahl und 10 mit 2 dividirt, gibt 2 mal die unbekannte Zahl; es fragt sich, was diese Zahl sey?

Auflösung. Eine unbekannte Zahl und 10 mit 2 dividirt gibt die Hälfte der Zahl und 5; ist die Hälfte einer unbekannten Zahl und 5 gleich der unbekannten Zahl; so kann die fernere Auflösung nach der Addition weiter fortgesetzt werden.

Ich habe schon bey den Einheiten als Kopfrechnungsaufgaben gezeigt, wie mannigfaltig die verschiedenen Rechnungsarten mit einander verbunden werden können und verbunden werden müssen, wenn der Entwickelung der geistigen Anlagen des Kindes in ihrem ganzen Umfange ein Genüge geleistet werden soll. Dieses ist aber auch hier nicht nur nicht entbehrlich, sondern es muß mit der nämlichen Sorgfalt und Umständlichkeit auch hier durchgeführt werden. Da es aber im Wesen für den Lehrer nichts neues mehr darbieten kann und leicht nach dem, was an mehrern Orten bey einer unbekannten Zahl mit bekannten geschehen ist, nachgeahmt werden darf, so erlaube ich mir hierüber nur folgende Bemerkungen.

Die Additionsform mit der Subtraction zu verbinden, wird, nachdem dieses mit der Ausdehnung statt gefunden hat, wie es in gegenwärtiger Darlegung geschehen ist, nicht mehr nothwendig; überdies sind die Aufgaben, die aus dieser Verbindung hervorgehen, weniger wichtig. Dieses kann aber bey dem allfälligen Bedürfniß leicht von jedem Lehrer angegeben und ausgeführt werden. Nothwendiger und wichtiger ist es indeß, daß man die Multiplication und Division mit einander verbinde. Diese Rechnungsarten aber noch mit der Addition und Subtraction in Verbindung setzen zu wollen, ist ebenfalls entbehrlich.

Die Multiplication und Division mit einer unbekannten Zahl in Verbindung gesetzt.

Einzelne Fragen werden nach dem, was bereits hierüber in jeder Rechnungsart statt gefunden, für den Lehrer hinlänglich seyn.

Fr. Eine unbekannte Zahl ist durch 2 multiplicirt und das Herausgekommene durch 3 dividirt worden und dadurch 20 entstanden; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey?

Auflösung. Eine unbekannte Zahl durch 2 multiplicirt, giebt 2 mal die erste oder ursprüngliche Zahl; wird dieses Resultat mit 3 dividirt, so erhält man ⅔ dieser ersten Zahl; denn 3 ist in 2 nur $^2/_3$ mal enthalten, und für $^2/_3$ der Zahl erhält man 20; folglich wird man für $^1/_3$ zehn und für die ganze Zahl 2×10 oder 20 erhalten.

So kann diese letzte Aufgabe nur umgekehrt, die Division vorangesetzt und die Multiplication als darauf folgend gegeben werden.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl und 10 mit $^1/_3$ dividirt und das hierdurch Erhaltene noch mit $2^1/_2$ multiplicirt 40 geben wird, wie viel ist die unbekannte Zahl?

Auch diese Aufgabe kann wieder umgekehrt werden:

Fr. Eine unbekannte Zahl weniger 10, soll mit 3 multiplicirt und das Erhaltene noch mit $^1/_2$ dividirt werden und dadurch 60 entstehen, wie viel wird diese unbekannte Zahl seyn?

Fr. Man hat eine unbekannte Zahl mehr 10 durch 2 multiplicirt und dadurch die nämliche Zahl erhalten, nachdem sie durch $^2/_7$ dividirt worden; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey?

Auflösung. Wird die unbekannte Zahl mehr 10 durch 2 multiplicirt, so erhält man zweymal diese Zahl mehr 20; wird die nämliche Zahl aber durch $^2/_7$ dividirt, so erhält man $3^1/_2$ mal die Zahl; folglich wird 2 mal die unbekannte Zahl mehr 20 so viel als $3^1/_2$ mal diese Zahl seyn. Einerseits hat man $1^1/_2$ mal diese unbekannte Zahl mehr, anderseits aber 20 mehr; wenn 20 so viel als $1^1/_2$ mal eine unbekannte Zahl ist, so kömmt auf einmal dieselbe $^2/_3$ von 20 oder $13^1/_3$.

Auf dieser Stufe kann man den Schüler leicht dahin führen, daß er als Abwechselung dann und wann auch in den Kopfrechnungsübungen die Probe über die eine und andere Aufgabe, die er lösen wird, macht. Auf jeden Fall soll man ihn die Probe nur zur Abwechselung, aber nie beständig und gleichsam von jeder Aufgabe machen lassen. Um zu zeigen, wie die Probe gemacht werden könne, führe ich obiges Beyspiel auch in dieser Rücksicht weiter fort.

Lehrer. Wenn das Resultat der letzten Aufgabe richtig ist, was muß die gefundene Zahl für Eigenschaften haben? Die Antwort wird seyn, daß, wenn man die unbekannte Zahl mit $^2/_7$ dividirt, gerade so viel herauskommen müsse, als wenn man die nämliche Zahl mit 10 durch 2 multiplicire. So mögen noch einige andere Beyspiele mit der Probe hier statt finden, deren Ausführung dem Lehrer nach Bedürfniß überlassen bleibt.

Eine unbekannte Zahl mit bekannten Zahlen durch die arithmetische Vergleichung ausgedrückt und dargelegt.

Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 60 ist gleich 10; welches wird diese unbekannte Zahl seyn? Abgekürzt aber auf die gewöhnliche Weise ausgedrückt:

a) der Unterschied einer unbekannten Zahl und 10 = 60; welches ist die unbekannte Zahl?

b) der Untersch. zwischen $^1/_2$ einer unb. Zahl und 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

c) der Untersch. zw. $^2/_3$ einer unb. Zahl und 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

d) der Untersch. zw. $1^1/_2$ einer unb. Zahl und 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

e) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und 10 = nichts; welches ist die unb. Zahl?

f) der Unterschied zwischen ½ einer unbekannten Zahl und 10 = nichts; welches ist die unbekannte Zahl?

g) der Untersch. zw. ⅔ einer unb. Zahl und 10 = nichts; welches ist die unb. Zahl?

h) der Untersch. zw. 1⅓ einer unb. Zahl und 10 = nichts; welches ist die unb. Zahl?

i) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und — 10 (negativ) = 60; welches ist die unb. Zahl?

k) der Untersch. zw. ½ einer unb. Zahl und — 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

l) der Untersch. zw. ⅔ einer unb. Zahl und — 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

m) der Untersch. zw. 1⅔ einer unb. Zahl und — 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

n) der Untersch. zw. — (negativ) einer unb. Zahl und 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

o) der Untersch. zw. — ¼ unb. Zahl und 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

p) der Untersch. zw. — ¾ unb. Zahl und 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

q) der Untersch. zw. — 1½ unb. Zahl und 10 = 60; welches ist die unb. Zahl?

r) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und 10 ist gleich der unb. Zahl; welches ist die unb. Zahl?

s) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und 10 = ½ unb. Zahl; welches ist die unb. Zahl?

t) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und 10 = $\frac{5}{4}$ unb. Zahl; welches ist die unb. Zahl?

u) der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 10 = $1\frac{1}{3}$ unb. Zahl; welches ist die unb. Zahl?

v) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und — 10 (negativ) = — 2 mal unb. Zahl; welches ist dieselbe?

w) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und — 10 = — $2\frac{1}{3}$ eine unb. Zahl; welches ist die Zahl?

x) der Untersch. zw. einer unb. Zahl und — 10 = — $2\frac{2}{3}$ unb. Zahl; welches ist diese Zahl?

Ich habe diese Reihenfolgen so ausgedehnt dargelegt, um die Uebergänge der einen Aufgabe zur andern durch dieses sogar bis in's Kleinliche in's Licht zu setzen, und faktisch zu zeigen, wie jede, auch die verwickelteste und schwierigste Aufgabe einen einfachen Hintergrund habe und von jedem Schüler, der naturgemäß vom Einfachsten zum Schwierigern und Zusammengesetztern geführt wird, auch wirklich gelöst werden kann. Wer sich aber hievon noch mehr zu überzeugen wünscht, den darf ich nur noch auffordern, den Gang, den ich zu ihrer Lösung einschlage, näher zu prüfen.

a) Wird der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und zehn, 60 betragen, so ist die unbekannte Zahl, in so fern sie als eine positive angenommen wird, um 60 mehr als die kleinere, die 10 ist, oder 70. Würde die unbekannte Zahl aber als eine negative angenommen, so wäre sie aus dem nämlichen Grunde 50 negativ. Ich habe aber schon im Anfange bemerkt, daß jedesmal, sowohl die bekannte als auch die unbekannte Zahl immer als eine positive angenommen wird, in so fern nicht ausdrücklich bemerkt wird, daß sie ein negatives Verhältniß auszudrücken habe.

b) Ist der Unterschied zwischen der Hälfte einer unbekannten Zahl und 10 gleich 60, so kommt nach obigem Grunde auf die Hälfte 70, und auf die ganze Zahl 140.

c) Kommen aber auf ⅔ dieses Unterschieds 60 zu stehen, so werden nach dem nämlichen Grunde ⅔ der Zahl 70 ausmachen; ⅓ erhält 35 und die ganze Zahl 105.

Die Probe einer solchen Aufgabe zu machen, wird für keinen Schüler mehr irgend eine Schwierigkeit darbieten können. Wollte man sie über letztes Beyspiele machen lassen, so könnte es auf folgende Weise geschehen: Zuerst nimmt man ⅔ von der gefundenen Zahl 105 und sieht, wie viel der Unterschied zwischen diesen ⅔ von 105 und 10 mache, und wird dadurch eine Zahl von 60 gefunden, so ist die Aufgabe richtig gerechnet worden.

Die Auflösung über d) ist derjenigen von c) vollkommen ähnlich.

e) Kommt auf den Unterschied einer unbekannten Zahl und 10, nichts, so ist die unbekannte Zahl so viel als 10.

f) Wird der Unterschied von der Hälfte einer unbekannten Zahl und 10 nichts betragen, so ist die Hälfte dieser Zahl so viel als 10, und auf die ganze Zahl kommen 2×10 oder 20.

Alle Auflösungen bis h) sind dieser letzten ähnlich.

i) Wenn der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 10 negativ 60 ist, so wird von 10 weniger als nichts bis zur unbekannten Zahl hinauf 60 seyn; von 10 negativ bis auf nichts hat es 10 und bis auf 60 bleiben also für die unbekannte Zahl noch 50.

k) Wird auf die Hälfte der unbekannten Zahl dieser nämliche Unterschied statt finden, so ist die Hälfte 50 und die ganze unbekannte Zahl 100.

Eben so gehen wieder alle andere Auflösungen bis zu m) fort.

n) Soll der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl negativ und 10 sechszig betragen, so kommt auf die unbekannte Zahl 50; denn von einer negativen Zahl bis auf nichts ist die Zahl, und von nichts bis auf 60 ist noch 10 dazu, also ist die unbekannte Zahl und 10 so viel als 60, und nach der Addition kommt auf die unbekannte Zahl 50.

o) Kommt auf ¼ dieser unbekannten Zahl und 10 wieder 60; so ist aus den nämlichen Gründen 50 = ¼ der Zahl, und die unbekannte Zahl 200.

So kann dieses wieder bis auf q) fortgesetzt werden.

r) Ist der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 10 gleich der unbekannten Zahl, so ist 10 die größere Zahl (denn der Unterschied ist immer kleiner als die größere Zahl); von der unbekannten Zahl bis zur größern oder 10 hat es noch einmal die unbekannte Zahl; folglich ist 10 zweymal die unbekannte Zahl, und einmal dieselbe 5.

Auf die gleiche Weise werden die Auflösungen bis u) fortgesetzt werden.

v) Soll der Unterschied zwischen der unbekannten

Zahl und 10 negativ gleich zweymal der unbekannten Zahl negativ seyn, so wird man von 10 negativ bis zur unbekannten Zahl die unbekannte Zahl und 10 erhalten, und diese betragen so viel als zweymal die Zahl; folglich kommt auf einmal dieselbe 10 nach der Additionsform.

Die Fortsetzung bis auf x) wird auf die gleiche Weise statt finden. Einzelne Fragen an den Schüler zu machen, die aus obiger Reihenfolge hervorgehen, ist so einfach und leicht, daß ich die weitere Ausführung hievon ebenfalls dem Lehrer überlassen darf. Auch bin ich sicher, daß sogar die schwächern Schüler, die einmal zu diesen Uebungen vorgerückt sind, diese Fragen mit Sicherheit selbst aufstellen werden. Da aber die arithmetische Vergleichung der Zahl noch einer andern Form unterworfen werden kann, so füge ich über dieselbe einige Beyspiele in einzelnen Fragen bey.

Fr. Welche unbekannte Zahl ist um 20 mehr als 80? und welche ist um 20 weniger als 80?

Auflösung. Soll die unbekannte Zahl um 20 mehr seyn als 80, so muß sie 80 und 20 oder 100 in sich enthalten; wird sie aber 20 weniger als 80 haben müssen, so wird sie aus dem nämlichen Grunde nur 60 seyn.

Fr. Wird das Doppelte einer unbekannten Zahl um 20 mehr seyn, als es ist, so beträgt es 100; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Wenn $\frac{7}{8}$ einer unbekannten Zahl um 20 weniger wären, als sie wirklich sind, so würde diese unbekannte Zahl 100 seyn; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Wäre eine unbekannte Zahl um 10 kleiner als sie wirklich ist, so wäre sie nichts, oder sie wäre 1 negativ; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey?

Wenn eine unbekannte Zahl um 100 weniger wäre, als sie wirklich ist, so würde sie 1, oder ½, oder 1½ mal die unbekannte Zahl negativ betragen; es fragt sich, was dieses für Zahlen seyen?

Würde eine unbekannte Zahl um 100 größer gemacht, so würde dadurch 2 oder 3 mal, oder ½, ⅔, 1½ mal ꝛc. die unbekannte Zahl entstehen; es fragt sich, was dieses für Zahlen seyen?

Wenn das Dreyfache einer unbekannten Zahl um 20 mehr wäre, als es wirklich ist, so wäre es gleich dem Doppelten mehr 100; es fragt sich, wie viel diese unbekannte Zahl seyn werde?

Welcher Ausdehnung diese Fragen fähig sind, wird jeder, der sie mit den oben aufgestellten Reihenfolgen vergleicht, leicht einsehen und keine Schwierigkeit mehr antreffen, dieselben nach Bedürfniß weiter auszuführen.

Unter der Form des Theilens noch einige Aufgaben:

Man soll 200 so in 2 Theile theilen, daß der eine Theil um 20 mehr wird als der andere; oder man soll sie so in zwey Theile theilen, daß der eine Theil um 20 weniger wird als der andere; es fragt sich, wie viel jeder Theil in jedem Fall seyn werde?

Auflösung für den ersten Fall. Wird ein Theil 20 mehr erhalten als der andere, so muß man von ihm 20 wegthun, bis er gleich wird dem zweyten Theil; zwanzig von 200 weggethan bleiben 180, die jetzt in gleiche Theile getheilt werden müssen; es kömmt deßwegen auf einen Theil 90; der erste Theil wird aber noch 20 mehr haben, 20 zu 90 gesetzt giebt 110 und für den zweyten Fall 90. Für den 2ten Fall werden 20 hinzugezählt, um die Theile gleich zu machen, und am Ende müssen die 20 wieder abgezogen werden. Die weitere Auflösung ist der obigen gleich.

Man soll 100 so in 2 Theile theilen, daß der Unterschied des ersten Theils vom 2ten gleich wird dem ersten Theil, oder daß der Unterschied dieser 2 Theile um 1 weniger wird als der größere, oder um 1 mehr als der kleinere; mehr als der größere kann er nicht werden, wenn sich kein negativer Theil dabey befinden darf.

Man soll 300 so in 3 Theile theilen, daß der 2te um 10 mehr wird als der erste, und der 3te um 20 mehr als der 2te; oder man soll 300 so in 3 Theile theilen, daß der 2te um 10 mehr wird als der erste, und der 3te um 15 mehr als der 2te oder auch als der 1ste ꝛc.; oder man soll die nämliche Zahl so in 3 Theile theilen, daß der 2te um 20 mehr wird als der 1ste und der 3te um 50 weniger als der 2te Theil ꝛc.?

Auflösung für den zweyten Fall. Vom 2ten Theil müssen 10 weggethan werden, wenn er dem 1sten gleich, und vom 3ten 25, wenn er auch dem ersten Theil gleich werden soll; denn der 2te Theil ist schon um 10 mehr als der 1ste, und der 3te ist ja noch um 15 mehr als der 2te; 10 und 25 oder 35 von 300 abgezogen bleiben noch 265, und diese in 3 gleiche Theile getheilt, kommt auf einen Theil 88⅓; der 2te Theil hat aber 10 mehr oder 98⅓, und der 3te Theil hat 15 mehr als der 2te oder 113⅓.

Soll die Probe hierüber gemacht werden, so müssen die 3 Theile 300 ausmachen; der 2te Theil muß 10 mehr seyn als der 1ste, und der 3te Theil um 15 größer noch als der 2te.

Die Auflösung der andern Fragen ist dieser letzten ganz ähnlich.

Eine unbekannte Zahl durch das geometrische Verhältniß ausgedrückt und mit bekannten Zahlen in Gleichheit gesetzt.

Damit ich meiner Darstellung die Abwechselung gebe, die nöthig ist, um dem Ganzen Lebendigkeit und Freyheit zu verschaffen, will ich hier keine Reihenfolgen mehr aufstellen, sondern mich begnügen, einige der wesentlichsten Fragen mit ihren Auflösungen nur in Kürze anzuführen.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl 3 mal größer wäre, als sie wirklich ist, so würde sie 100 ausmachen; es fragt sich, wie viel die Zahl sey?

Wenn eine unbekannte Zahl um 1½ mal ihre Größe kleiner wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie 40 negativ; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Eine unbekannte Zahl ist 1½ mal so groß als 10; es fragt sich, welches diese Zahl sey?

Zehn ist 3 mal so groß oder 3 mal größer als welche unbekannte Zahl?

Wie oft muß man zu 100 eins hinzusetzen, während dem man zu nichts 2 setzt, bis beyde Zahlen einander gleich werden? Antwort: dieses muß 100 mal geschehen.

Auflösung. Setzt man zu 100 eins, so wird und soll im nämlichen Moment zu nichts 2 gesetzt werden; also kommt zu nichts immer eins mehr als zu 100; es fehlen ihm aber 100 bis es der 1sten Zahl gleich ist, und diese 100 müssen durch das eins, welches mehr hinzugesetzt wird, nachgeholt werden; eins ist in 100 hundertmal enthalten, also muß dieses eben so oft geschehen.

Auch kann diese Aufgabe auf folgende Weise gelöst werden.

Das 100 nimmt um eine unbekannte Zahl mal ab oder um eine unbekannte Zahl zu, während dem nichts um 2 solcher Zahlen zunimmt; also erhält man 100, und die unbekannte Zahl ist gleich 2 mal dieser unbekannten Zahl, und nach der Addition wird diese Zahl dann ebenfalls 100 werden.

Fr. Wie oft muß man ⅔ zu 100 setzen, während dem man zu nichts 2 setzt, bis beyde Zahlen einander gleich werden?

Auch diese Aufgabe wird ganz gleich, wie die vorhergehende, gelöst, nur mit dem Unterschied, daß das, was die zweyte Zahl weniger ist als die erste, mit 1⅓ statt mit 1 ersetzt werden darf.

Fr. Wie oft muß man zu hundert eins setzen, während dem man zu 10 zwey setzt, bis beyde Zahlen einander gleich werden?

Eben so kann die gleiche Frage gemacht werden, wenn die zweyte Zahl, statt 10 positiv, 10 negativ angegeben worden wäre. Die Abänderung, die allenfalls durch die Brüche in die Aufgabe gebracht werden könnte, darf hier gar nicht mehr in Betracht kommen. Deßwegen werden nach und nach auch alle Aufgaben wegbleiben, die keinen andern Zweck haben, als nur das Bruchverhältniß noch anschaulicher zu machen.

Fr. Wie oft muß man von hundert die Zahl 10 wegthun, während dem man von 10 eins wegthut, um zwey gleiche Zahlen dadurch zu erhalten?

Auch hier können die Fragen so gestellt werden, daß man nichts oder auch negative Zahlen bekommt.

Fr. Wie oft muß man zu nichts eins setzen, während dem man von 100 eins abzieht, bis beyde Zahlen einander gleich werden? Antwort: $33\frac{1}{3}$ mal.

Auflösung. Hundert wird durch das Abziehen von eins um eins verringert, während dem nichts durch das Hinzusetzen von 2 um 2 vermehrt wird; folglich nähern sie sich durch das Hinzusetzen und Abziehen jedesmal um 3; noch sind sie um 100 von einander entfernt; 3 ist $33\frac{1}{3}$ mal in 100 enthalten; es muß demnach $33\frac{1}{3}$ mal hinzugesetzt und abgezogen werden.

Eine Zahl ist 100 und eine zweyte hundert negativ; von der ersten zieht man $\frac{1}{3}$ ab und zur 2ten setzt man $\frac{1}{3}$ hinzu; es fragt sich, wie oft dieses geschehen müsse, wenn beyde Zahlen einander gleich werden sollen?

Zu 100 wird 1 gesetzt und zu nichts 3; es fragt sich, wie oft dieses geschehen müsse, bis die 2te Zahl oder das nichts um 100 mehr seyn wird als die erste?

Um diese Aufgabe zu lösen, kann man sehen, wie oft dieses geschehen müsse, bis sie gleich werden, und hernach wird das Nämliche für die hundert mehr noch einmal wiederholt. Auch kann dieses über einmal so gemacht werden. Statt nichts kann die 2te Zahl als negativ in's Auge gefaßt und dieses dann auf die gleiche Weise weiter fortgesetzt werden. Statt mehr kann man in die Frage auch weniger bringen, und dieses wird öfters durch diese Bestimmung in die zu suchenden Resultate negativer Zahlverhältnisse gegeben.

Man hat zwey Zahlen, wovon jede 100 ist; zur ersten setzt man 1 und zur 2ten 4; es fragt sich, wie oft dieses geschehen müsse, bis die 2te Zahl doppelt so groß wird als die erste? Antwort: 50.

Auflösung. Beyde Zahlen sind gleich; soll aber die zweyte doppelt so groß werden als die erste, so fehlen ihr noch 100; denn sie müßte 200 seyn; zur ersten wird 1 gesetzt, während dem zur zweyten 4 gesetzt wird; also wird zu ihr 2 mehr als das Doppelte hinzugesetzt. Mit diesen 2 werden die 100, die aber der 2ten Zahl fehlen, ersetzt werden müssen; 2 ist in 100 fünfzigmal enthalten, folglich muß dieses auch 50 mal hinzugesetzt werden, bis man Zahlen findet, die dem begehrten Verhältniß entsprechen.

Man setzt zu einer Zahl, die 100 ist, eins, während dem man zu nichts 4 setzt, wie oft muß dieses gethan werden, bis die 2te Zahl dreymal so groß wird als die erste?

Auflösung. Soll die zweyte Zahl 3 mal so groß werden als die erste, so müssen 300 zu ihr hinzugesetzt werden; und will man das Dreyfache erhalten, so müssen auch jedesmal 3 hinzugesetzt werden, während dem man zur ersten eins setzt; nun werden 4 hinzugefügt, also 1 mehr als das Dreyfache; es fehlen aber noch 300, und diese

diese 300 mit eins ergänzt wird es 300mal nöthig, folglich muß es 300 mal hinzugesetzt werden.

Wie oft muß man ½ zu 80 setzen, während man zu nichts 5½ setzt, bis sich die 2te Zahl zur ersten verhält, wie 7 zu 2, oder anders ausgedrückt, bis die 2te 3½ mal so groß seyn wird als die erste; oder bis sich die erste zur 2ten verhält, wie 2 zu 7?

Die letzte Frage mit folgendem Zusatze: Wie oft muß dieses hinzugesetzt werden, bis die 2te Zahl 3½ mal so groß wird als die erste, mehr hundert?

Auch kann das w e n i g e r auf die gleiche Weise hinzugefügt werden. Daß die nämlichen Fragen auf negative Zahlen ausgedehnt werden können, versteht sich von selbst. Alle diese Aufgaben sollen ohne Anstand von den Schülern gelöst werden, und im Falle ihnen die hier befolgten Aufgaben, wie sie auf einander folgen, noch unübersteigliche Hindernisse darbieten würden, so müßten nur mehrere Zwischenfragen gemacht werden, worüber die Reihenfolgen der arithmetischen Vergleichungen als Leitfaden dienen mögen.

Wie ich früher schon bemerkte, so kann die Addition mit der Subtraction, die Multiplication mit der Division ꝛc. verbunden werden. Auch habe ich einige Beyspiele gegeben, die dieses in's Licht zu setzen geeignet sind; aber auch mit den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen können und sollen die gleichen Verbindungen statt finden. Ich werde auch hiefür einige Beyspiele anführen. Kann der Schüler mit Leichtigkeit jede Aufgabe in ihrem unverbundenen Zustande lösen; so wird er mit etwas mehr Mühe und Anstrengung jede Aufgabe, die ihm nur als Combinationsverhältniß vorgelegt wird, zu lösen im Stande seyn. Diese Arten von Aufgaben müssen weder als etwas Neues noch als etwas Nichtiges angesehn und behandelt werden. Diese einzelnen Fragen sollen nichts weiter seyn, als eine kurze und veränderte Wiederholung dessen, was er im Wesen schon kennt. — Auch werde ich nicht einmal angeben, unter welchen selbstständigen Gesichtspunkten die jedesmalige Verbindung aufgefaßt werden müsse, weil auch dieses auf der gegenwärtigen Stufe sehr gleichgültig ist.

Fr. Wenn man den Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 10 durch ½ dividirt, so erhält man 6 mal die unbekannte Zahl; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey?

Wird der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und zehn durch ⅔ multiplicirt, so erhält man 100; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Auflösung. Wenn der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 10 mit 2 multiplicirt 100 geben soll, so ist die unbekannte Zahl die größere; um den Unterschied zu erhalten, muß man die kleinere Zahl von der größern abziehn; dieser Unterschied mit ⅔ multiplicirt giebt ⅔ der unbekannten Zahl, die 100 machen, also auf ⅓, 50 und auf die ganze Zahl 150; da man aber schon früher 10 abgezogen hatte, so wird diese Zahl 160 seyn.

Man dividirt den Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 10 negativ mit 2½ und erhält dadurch 100; es fragt sich, was oder wie viel diese Zahl sey?

Auflösung. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 10 negativ ist 10, und die unbekannte Zahl, und dieses mit $2\frac{1}{2}$ dividirt giebt $\frac{2}{5}$ dieser Zahl, $\frac{2}{5}$ von 10 macht 4, und wenn $\frac{2}{5}$ einer unbekannten Zahl und 4 gleich 100 sind, so wird nach der Addition die unbekannte Zahl gleich 240 werden.

Probe. Wenn diese Zahl richtig ist, so muß der Unterschied zwischen 10 negativ und 240, durch $2\frac{1}{2}$ dividirt 500 geben; $2\frac{1}{2}$ sind gleich $\frac{5}{2}$ und der Unterschied zwischen 10 negativ und 240 ist 250, oder $\frac{500}{2}$, und diese Zahl durch $\frac{5}{2}$ dividirt, giebt 100.

Man setzt zu 100 eins, während dem zu nichts $3\frac{1}{2}$ gethan wird; es fragt sich, wie oft dieses geschehen müsse, bis die 2te Zahl durch $2\frac{1}{2}$ multiplicirt gleich wird der ersten Zahl?

Desgleichen kann bey diesen Aufgaben über das Dividiren gefragt werden.

Der Unterschied zwischen den Hälften einer unbekannten Zahl und 100 ist gleich dem fünffachen dieser unbekannten Zahl; es fragt sich, wie viel die Zahl sey?

Auch hier kann wieder Mehr und weniger hinzugefügt werden.

Wenn das Dreyfache einer unbekannten Zahl um 10 mehr wäre als es ist, und dieses mit 3 multiplicirt würde, so würde man 100 erhalten; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Desgleichen wenn sie mit 3 dividirt wird. Auch kann man statt mehr 10, weniger 10 u. s. w. setzen.

Wird $1\frac{1}{2}$ mal eine unbekannte Zahl mit $\frac{7}{8}$ multiplicirt, so erhält man das 10fache dieser unbekannten Zahl, nachdem man 30 abgezogen haben wird; es fragt sich, wie viel diese Zahl sey?

Wenn eine unbekannte Zahl um 10 mehr wäre, als sie wirklich ist, und dieses dann mit 2 dividirt wird, so erhält man 200; es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey?

Die gleiche Frage kann auch gemacht werden, wenn es um so viel weniger geben soll.

Ich schließe die Darstellung einer unbekannten Zahl und will mich über die Art und Weise, wie diese der Jugend in dem hiefür bestimmten Alter vorzutragen sey, noch näher erläutern: Es kann niemand entgehen, daß es sich auch hier hauptsächlich um die Entwicklung der geistigen Kräfte und Anlagen des Kindes handelte, und hohe Zahlverhältnisse und schwierige Brüche ausgewichen wurden. So sehr dieses im allgemeinen nothwendig ist, so darf bey einem sehr kräftigen Schüler nach Maßgabe seiner geübten Kraft auch zu höhern und schwierigern Bruchverhältnissen geschritten werden; aber auch bey ihm darf dieses nie Hauptsache werden. Mechanische Fertigkeiten und Gedächtnißkraft müssen in allen Fällen seiner geistigen Entwicklung untergeordnet bleiben.

Auch wird man bemerkt haben, daß eine Art von Aufgabe sowohl in den Reihenfolgen als auch sonst dem Schüler nie mehr als einmal vorgelegt worden, und daß überhaupt alle Art von Wiederholung ausgewichen worden ist. Je weiter die entwickelte Geisteskraft des Kindes vorgerückt ist, desto mehr muß das im Anfang aufgestellte Einüben sich vermindern und am Ende ganz wegfallen.

Man kennt das Sprichwort: „Aller Anfang ist schwer." Ich sage aber, bey einer naturgemäßen Führung der Jugend muß aller Anfang leicht und das Schwerste des Endes muß ihr noch am leichtesten werden.

Ist der Schüler gut und richtig geführt worden, so muß ihm das Ende der obigen Uebung leichter werden, als es selbst die Anfangsübungen waren. Einleuchtend ist ebenfalls, daß diese Uebungen auch auf das Zifferrechnen angewendet werden können; es ist aber bey dem hier befolgten Gange um so weniger nothwendig, als neben diesen Kopfrechnungsübungen das angewandte Zifferrechnen parallel damit fortläuft. Will man aber diese Uebungen auf schriftliche Zeichen anwenden, so sind sie vorzüglich für die Algebra geschickt. Da die größere Zahl der Lehrer und Erzieher, so wie auch die Schüler, nicht so weit geführt werden; so wird man es nicht mißbilligen, daß ich in dieser Schrift in der Darlegung der Zahl ebenfalls nicht bis auf diesen Punkt fortschreite.

Aber es werden mir einige einwenden und sagen: „Diese letzten Uebungen sind ja schon das Wesen der Algebra und es fehlt ihnen hier nur noch der Name und einige Kunstformen und Kunstausdrücke derselben." So wahr und richtig diese Ansicht auch ist, so erschöpft sie das Wesen der Algebra dennoch nicht. Diese Uebungen sind freylich der Schlüssel zur Algebra, aber sie sind nicht weniger der Schlüssel zu allem, wo immer eine höher gebildete, geistige Kraft erfordert wird. Diese Uebungen sind eben so gut der Schlüssel zur Größenlehre (Geometrie), zur Logik, zur angewandten Zahl- und Größenlehre und selbst zu ihr ganz fremdartigen Studien, in so fern sie die

Geisteskraft in einem sehr hohen Grad ansprechen. Dieser Schlüssel ist weder den Sprachstudien noch selbst dem Studium der Geschichte fremd; versteht sich nur so weit diese Fächer eine sehr entwickelte geistige Kraft in Anspruch nehmen. So wie eine unbekannte Zahl unter allen diesen Formen durchgeführt wurde, so können auch zwey und drey unbekannte Zahlen behandelt werden. Dieses aber auf mehrere Zahlen ausdehnen zu wollen, zähle ich zur eigentlichen Vorbereitung für die Algebra, die auf eine noch höhere Stufe der Bildung gehört und außer dem Zweck der gegenwärtigen Schrift liegt. Ich schreite zu den folgenden Uebungen, die mehr Licht geben mögen, wo es durch gegenwärtige Darlegung immer noch dunkel geblieben seyn mag.

Die angewandte Zahl ist einer doppelten Behandlung, nämlich als Kopf- und als Zifferrechnung, fähig. Auch hier müssen die Kopfrechnungsübungen denjenigen mit den Ziffern vorangehen, und zwar so, daß eben so viel Zeit auf diese Kopfrechnungsübungen zu verwenden seyn wird, als dieses bey einer unbekannten Zahl, die als allgemeine Größe in's Auge gefaßt wurde, durch die so eben aufgestellten Reihenfolgen geschehen ist; für beydes darf hinwieder nur so viel Zeit gebraucht werden als für's angewandte Zifferrechnen.

Wenn die Uebungen in dem aufgestellten Zusammenhange und mit dem festgesetzten Zeitaufwand betrieben werden, so kann es nicht fehlen, das Kopfrechnen wird dem Zifferrechnen immer in gehöriger Entfernung vorhergehen. Sollte aber der Fall eintreten, daß ein Lehrer mit dem

Zifferrechnen dem Kopfrechnen vorkäme, so müßte natürlich nur mehr Zeit auf Letzteres verwendet werden. Jede Anwendungsaufgabe, die etwas tiefer in das praktische Leben einzugreifen geeignet ist, setzt nicht nur die vier bekannten Rechnungsarten, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, sondern selbst das arithmetische und geometrische Verhältniß der Zahl, sowohl in ganzen Zahlen als auch in Brüchen voraus. Die Lösung einer einzigen Anwendungsaufgabe fordert bald eine dieser Rechnungsarten mehrermal, bald mehrere derselben einmal und öfters werden für den gleichen Zweck alle Rechnungsformen zusammen benutzt; folglich kann der früher aufgestellte Gang der Zahlenlehre als Anwendung in folgenden umwandelt und abgeändert werden.

Statt bey den einfachsten Zahlenverhältnissen anzufangen, und in lückenlosen Reihenfolgen weiter zu schreiten, muß man hier bey den einfachsten Lebensverhältnissen und ihrer Anwendung den Anfang der angewandten Zahlenlehre machen und in lückenlosen Reihenfolgen, die aus dem Leben hervorgehen, zu den verwickelten vorschreiten.

Das Leben bekümmert sich weder um die Additions-, noch Subtractions-, noch um irgend eine andere Anwendungsform, es spricht bald die eine, bald die andere an, und je leichter es für den Schüler ist, zu entscheiden, ob er die eine oder andere dieser Rechnungsarten anzuwenden habe, um irgend ein unbekanntes angewandtes Zahlenverhältniß zu finden; desto leichter ist eine solche Aufgabe, und muß als naturgemäße Reihenfolge einer Aufgabe vorgesetzt werden, die gerade die entgegengesetzten Eigenschaften hievon besitzen würde. Doch auch alles dieses wird durch die Darlegung der Reihenfolgen weitaus klarer, als es zum voraus durch wörtliche Erläuterungen und Bestimmungen je möglich werden könnte. Ich mache den Anfang mit den einfachern, die mit eben der Sicherheit, wie es in der Zahlenlehre geschehen ist, den Schüler lückenlos von dem Einfachern zu dem Schwerern zu führen geeignet sind.

Anwendungsaufgaben.

Wenn 2 Pfund, oder 2 Maß, oder 2 Schuh, oder 2 Klafter u. s. w. von dieser oder jener Waare 6 Batzen, Kreuzer ꝛc. kosten, wie viele Batzen ꝛc. werden dann 40 Pfund ꝛc. von genannten Waaren kosten? Dann wird wie bey gewöhnlichen Zahlen zu Reihen vorgeschritten, und gefragt, was diese Waaren kosten würden, wenn man statt 2 Pfund zuerst $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ Pfund angeben würde, hernach $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ꝛc Pfund, und endlich auch $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{5}$ ꝛc. Pfund. Will man dem Schüler diese Arbeit sehr erleichtern, so läßt man ihn alle diese Aufgaben in obiger Reihenfolge lösen, die 40 Pfund werden für diesen Fall immer unverändert bleiben. Will man in ununterbrochenen Reihenfolgen weiter schreiten, so kann man zu den 40 Pfund noch einen Bruch setzen, und diese Aufgaben alle noch einmal mit diesem Bruchverhältniß den Schüler durchüben lassen. Eben so könnte auch noch ein Bruch zu den 6 Batzen oder irgend eine andere Münzsorte gesetzt und ihm auch bey dieser Veränderung alle Aufgaben noch einmal eingeübt werden.

Man wird hier die Bemerkung machen, dieses führe zu einer solchen Mannigfaltigkeit von Aufgaben, wovon die eine so unbemerkbar schwieriger als die vorhergehende werde, daß man diese Nothwendigkeit auf diese Weise vom Leichtern zum Schwereren zu schreiten, auf dieser Stufe gar nicht dringend und nützlich erachte. Es ist hier gar nicht darum zu thun, dem Schüler alle diese Aufgaben zur Lösung vorzulegen, sondern nur, um einen Typus für die Anwendungsaufgabe aufzustellen, damit der Lehrer mit Leichtigkeit die Aufgabe nach Bedürfniß zu machen in den Stand gesetzt werde.

Ich kehre aber zur Lösung der letzten Aufgaben zurück, und werde auch hier in einem erschöpfenden Typus zeigen, wie mannigfaltig Aufgaben dieser Art aufgelöst werden können, und wirklich in dieser Mannigfaltigkeit für den Anfang gelöst werden müssen.

Auflösung. Wenn 2 Pfund oder 2 Maß ꝛc. 6 Batzen kosten, so wird 1 Pfund, welches der halbe Theil von 2 Pfunden ist, auch den halben Theil von 6 Batzen oder 3 Batzen, und 40 Pfund der nämlichen Waare auch 40 mal 3 Batzen 120 Batzen kosten.

Auf eine zweyte Art gelöst.

Wenn 2 Pfund 6 Batzen kosten; so werden 40 Pfund auch so oft mal 6 Batzen kosten, als 40 Pfund 2 Pfund ausmachen, 40 sind 20 mal 2 Pfund, also kosten sie auch 20 mal 6 Batzen oder 120 Batzen.

Auf eine dritte Art gelöst.

Die Anzahl der Pfunde ist von der Anzahl der Batzen, die sie kosten, zweymal der 6te Theil verkleinert $\frac{1}{3}$; also muß auch die Anzahl der gegebenen Pfunde, deren Preis unbekannt ist, der dritte Theil von der Anzahl Batzen seyn, die sie kosten werden; 40 ist der dritte Theil von 120; welches die für diesen Fall zu suchende Anzahl Batzen ist.

Auf eine vierte Art gelöst.

Wenn 2 Pfund 6 Batzen kosten, so kostet diese Anzahl Pfund 3 mal so viel Batzen als Pfund sind; folglich muß die zu suchende Anzahl Batzen auch 3 mal so groß seyn, als die 40 Pfund; 3 mal 40 macht 120; also kosten sie auch, auf diese Art gelöst, 120 Batzen.

Auf eine fünfte Art gelöst.

2 Pfund sind von 40 Pfund der 20ste Theil, also muß auch das, was die 2 Pfund kosten, der 20ste Theil von dem seyn, was 40 Pfund kosten werden; 6 Batzen sind der 20ste Theil von 20 mal 6 oder 120 Batzen.

Auf eine sechste Art gelöst.

Die Anzahl der Pfunde, deren Werth in Batzen unbekannt ist, ist 20 mal so groß als die Zahl der Pfunde, deren Werth bekannt ist; also muß auch dieser Werth 20 mal so groß seyn, als es der Werth der unbekannten Pfunde ist, 20 mal 6 Batzen geben 120 Batzen.

Auf eine siebente Art gelöst.

Ich nehme an, 1 Pfund koste 6 Batzen, so werden 40 Pfund 40 mal 6, oder 240 Batzen kosten; nun aber kostet nicht ein, sondern es kosten 2 Pfund 6 Batzen; also ist das, was man gefunden hat, das Doppelte von dem, was sie kosten, deßwegen muß noch die Hälfte genommen werden, die Hälfte von 240 ist 120.

Noch wären andere Auflösungen möglich; doch durch diese sieben sind die wesentlichsten Verschiedenheiten erschöpft; die andern Abänderungen können übergangen werden. Hat ein Lehrer eine beträchtliche Anzahl Schüler, und fordert er sie auf, mehrere von einander ganz verschiedene Auflösungsarten zu machen, so werden sie auch alle obige sieben gewiß mit Leichtigkeit finden. Der Lehrer darf sich nicht damit begnügen, daß die Schüler ihm nur einige dieser Abänderungen auffinden; besonders ist dieses für den Anfang nothwendig; denn je mehr Freyheit und Allseitigkeit in die ersten und einfachsten Anwendungsaufgaben gebracht werden, desto mehr wird das begründet, was durch die angewandten Kopfrechnungsaufgaben erzielt werden muß. Die verschiedenen Auflösungsarten führen den Schüler auf eine besondere und eigenthümliche Weise in das praktische Leben ein, und dieses muß auf der gegenwärtigen Stufe als das Wesen einer eigenthümlichen Entwicklung der Geisteskräfte des Kindes in den angewandten Lebensverhältnissen desselben angesehen und demgemäß behandelt werden. Jede Zahlcombination darf ihm hier nur als Werkzeug dienen.

Aus dieser einzigen Aufgabe wird dem aufmerksamen Beobachter klar, auf welchem Fundament die eigentlichen Anwendungsaufgaben ruhen, und wodurch sie sich im Wesen von denen, die als reine Entwicklung der geistigen Kräfte des Kindes vermittelst der Zahl aufgestellt worden sind, wirklich unterscheiden.

So wie zur Abwechselung die Probe beym Zifferrechnen gemacht wurde, so kann dieses auch bey den angewandten Aufgaben geschehen, und ist den nämlichen Abänderungen unterworfen, wie die Lösung der letzten Aufgaben; doch ist es nicht nothwendig, daß die Probe in dieser ganzen Ausdehnung statt finde. Zwey oder drey von den sieben verschiedenen Auflösungen sind dießfalls hinlänglich.

Sind die Schüler so geführt worden, daß sie die obigen Auflösungen ohne weitere Hülfe und Handbietung des Lehrers machen, so dürfen, außer ein paar Auflösungen, die übrigen von den oben aufgestellten für diesen Endzweck vollkommen entbehrlich seyn.

Fr. Wenn 2 Pfund, 2 Maß, 2 Zentner 3 fl. 48 kr. kosten, wie viel werden 21 Pfund kosten?

Auflösung. Nach der ersten Auflösungsart wird man finden, daß ein Pfund die Hälfte von 2 Pfunden ist und also auch die Hälfte von ihrem Preis kosten werden; die Hälfte von 3 fl. 48 kr. ist 1 fl. 54 kr., und 21 Zentner 21 mal so viel, 54 kr. sind aber $\frac{9}{10}$ fl., folglich 21 mal 1 fl. und $\frac{9}{10}$.

Eine zweyte Auflösung. So oft als 21 Zentner 2 Zentner machen, eben so oft werden sie auch 3 fl. 48 kr. kosten; 21 Zentner sind 10 und $\frac{1}{2}$ mal 2 Zentner, also kosten sie $10\frac{1}{2}$ mal 3 fl. 48 kr. oder $3\frac{4}{5}$ fl. Aus diesen zwey Auflösungsarten geht klar hervor, daß alle oben aufgestellten Abänderungen auch auf die Auflösung der letzten Aufgabe anwendbar sind. Wie weit dieses auszuführen nothwendig ist, muß man der Beurtheilung des

Lehrers überlassen. Als Leitfaden für ihn kann ich nur folgendes sagen: Sollte der Schüler Schwierigkeiten finden, obige Aufgaben nach den sieben verschiedenen Auflösungsformen zu behandeln, so wird es nothwendig, diese Anwendung auf andere Gegenstände nicht als überflüssig zu erachten; für diesen Fall müssen aber bey jeder Aufgabe mehrere der oben angegebenen Anflösungen wirklich in Anwendung gebracht werden.

Obige Aufgabe kann umgekehrt als Probe oder auch als eine neue Aufgabe angesehen werden.

Fr. Wenn man für 3 fl. 48 kr. 2 Zentner erhält, wie viele Zentner wird man für 39 fl. 54 kr. erhalten?

Daß auch hier wieder alle obigen Auflösungsarten angewendet werden können, mag aus folgender hervorgehen: So oft 3 fl. und 48 kr. in 39 fl. 54 kr. enthalten sind, eben so oft wird man 2 Zentner erhalten; 3 fl. 48 kr. sind 3⁸⁄₁₀ Gulden, und 39 fl. 54 kr. sind 39⁹⁄₁₀ Gulden; um weiter untersuchen zu können, wie oft sie wirklich darin enthalten sind, verwandelt man beyde Zahlen in Zehntel und verfährt wie bey einer einfachen Division; das gefundene Resultat (der Quotient) wird dann 21 oder die gesuchte Anzahl Zentner seyn.

Etwa drey Arten von Geldwerth in einer Aufgabe angeben zu wollen, würde zu sehr nur die Gedächtnißkraft ansprechen und gehört zum angewandten Zifferrechnen, wie z. B. wenn 2 Zentner 3 fl. 48 kr. 3 hll. kosten, wie viel werden 21 Zentner kosten? Noch weniger kann folgende Aufgabe gegeben werden:

Wenn 2 Zentner 3 fl. 48 kr. und 3 hll. kosten, wie viel werden 21 Zentner 34 Pfund und 3 Loth kosten?

Am allerwenigsten dürfte folgende Aufgabe hier eine Stelle finden:

Wenn 2 Zentner 36 Pfund und 4 Loth 3 fl. 48 kr. und 3 hll. kosten; wie viel werden 21 Zentner 34 Pfund und 3 Loth kosten?

Aber, wird man mir einwenden, auf der gegenwärtigen Stufe sollte es doch dem Schüler nicht unmöglich seyn, ähnliche Fragen auch im Kopf ohne Hülfe der Ziffern zu lösen. Angenommen, er würde ähnliche Aufgaben ohne große Anstrengung lösen, so muß man die Geisteskräfte des Kindes nicht mit etwas Unwesentlichem ermüden. Die Hauptanstrengung wäre bey der Lösung einer solchen Aufgabe immer nur die Gedächtnißkraft. So sehr diese Kraft auch geachtet, entwickelt und gebildet werden muß, so ist hier nicht das Gebiet, auf welchem sie gepflegt und angewendet werden darf. Man hat also immer Unrecht, wenn man die Gedächtnißkraft da entwickeln und bilden will, wo nur die Entwicklung der Geisteskraft mit Erfolg gepflegt und angewandt werden kann; auch umgekehrt hat man nicht weniger Unrecht, wenn man Geistesanlagen da zu entwickeln sucht, wo nur die Gedächtnißkraft einen fruchtbaren Boden finden soll. Unstreitig hat eine unrichtige Anwendung sowohl des einen als auch des andern zu allerley Mißgriffen Anlaß gegeben.

Die nämlichen Aufgaben können auch auf die Verwandlung der verschiedenen Münzsorten angewendet werden. Ein einziges Beyspiel mag auch hierüber genügen.

Wenn 11 Reichsgulden 24 französische Livres machen, wie viele franz. Livres werden 100 Reichsgulden ausmachen?

Auflösung. So oft man 11 Reichsgulden hat, so oft werden die 100 Reichsgulden 24 franz. Livres machen; 11 sind in 100 $9\frac{1}{11}$ mal enthalten, also giebt es auch $9\frac{1}{11}$ mal 24 franz. Livres, oder $218\frac{2}{11}$.

Auf eine zweyte Art gelöst.

Wenn 11 Reichsgulden 24 franz. Livres machen, so wird ein Gulden den 11ten Theil von diesen 24 franz. Livres enthalten, der 11te Theil davon ist $2\frac{2}{11}$ franz. Liv. und die 100 Reichsgulden werden 100 mal $2\frac{2}{11}$ oder $218\frac{2}{11}$ franz Liv. geben.

Auf eine dritte Art gelöst.

Die Anzahl der Reichsgulden verhält sich zu den franz. Livres, wie 11 zu 24; also muß sich die Anzahl der Reichsgulden zu den franz. Livres, die man sucht, eben so verhalten; der 11te Theil davon ist $9\frac{1}{11}$ und die zu suchende Zahl muß 24 solche Theile haben.

So giebt es auch hier 7 verschiedene Auflösungen, die ich der Kürze halber nicht weiter ausführe, in dem überdieß auch der schwächere Schüler dieses nach der aufgestellten Form nachzuahmen fähig ist.

Wird auch hier das Umgekehrte gefragt, so kann es als eine neue Aufgabe in das Auge gefaßt, oder als die Probe, z. B. wenn 24 franz. Livres 11 Reichsgulden machen, wie viel werden $218\frac{2}{11}$ franz. Livres Reichsgulden machen?

Auflösung. Wenn 24 franz. Livres 11 Reichsgulden machen, so werden 218³/₁₁ so viel mal 11 Reichsgl. machen als 24 darin enthalten ist; um dieses zu untersuchen, kann man alles zu 11teln machen, doch gäbe dieses eine sehr hohe Zahl; der Schüler wird besser thun, wenn er den 24sten Theil zuerst von dem Ganzen, hernach von dem Bruch nimmt, und dann diesen Theil mit 11 multiplicirt.

Auch diese Aufgabe, die als Probe der ersten angesehen wird, kann, wie die vorhergehenden, auf etwa 7 Arten gelöst werden.

Daß dieses auf alle Arten Münzen nach diesem Muster angewandt werden kann, soll jetzt keinem Zweifel mehr unterliegen und nach Bedürfniß auch von jedem auf Münzen, Gewichte, Maaße u. s. w., die in der Gegend, in welcher er wohnt, so verglichen und verwandelt und nach Bedürfniß der Schüler auf Gegenstände ausgedehnt werden kann, die in der Localität, in der man sich befindet, Nutzen und Anwendung für denselben zu gewähren geeignet sind. Ich setze deßhalb dieses nicht mehr weiter fort und schreite zu Uebungen vor, die nicht so leicht ohne weitere Anleitung und Handbietung durch den Lehrer ausgeführt werden können.

Fr. Wenn 100 Arbeiter in 4 Tagen eine gewisse Arbeit machen; wie lange werden 7 Arbeiter an einer eben so großen Arbeit haben? vorausgesetzt, sie arbeiten täglich gleich lang und die Arbeit sey in allen andern Punkten der ersten gleich.

Auflösung. Wenn 100 Arbeiter 4 Tag an einer

gewiß-

gewissen Arbeit zu thun haben, so wird ein Arbeiter 100 mal so lang als 100 Arbeiter daran haben, oder 100 mal 4 Tag gleich 400 Tag, oder es werden 400 Tagwerke zu dieser Arbeit erfordert. Sind aber 7 Arbeiter zu diesen 400 Tagwerken, so trifft es einen Arbeiter nur den 7ten Theil davon, oder $57\frac{1}{7}$ Tag.

Zweyte Auflösung. Wenn 7 Arbeiter in einer gewissen Anzahl Tage die nämliche Arbeit verrichten, die 100 in 4 Tagen machen, so sind $1\frac{3}{4}$ mal so viel Arbeiter als zur ersten Arbeit nöthig; also wird in einem Tag $\frac{7}{4}$ gemacht, und da $\frac{7}{4}$ in 100 Ganzen $57\frac{1}{7}$ mal enthalten sind, so werden $57\frac{1}{7}$ Tag dazu erfordert.

Mehrere verschiedene Arten von Auflösungen über diese Aufgabe machen zu wollen, ist, nachdem die vorhergehenden in diesem Umfange statt gefunden haben, nicht mehr nothwendig. Die zwey so eben aufgestellten gehören zu den wesentlichern. Aehnliche Fragen umgekehrt können wieder als Probe dienen.

Wenn in 50 Tagen von 6 Arbeitern eine gewisse Arbeit gemacht worden ist; wie viel Arbeiten erfordert es, wenn die nämliche Arbeit in zwey Tagen vollendet seyn soll?

Auflösung. Wenn in 50 Tagen von 6 Arbeitern eine gewisse Arbeit gemacht wird, so werden zur ganzen Arbeit 50 mal 6 oder 300 Tagwerke erfordert; wenn die 2ten Arbeiter in 2 Tagen dieses Werk vollenden sollen, so wird in einem Tag die Hälfte von den 300 Tagwerken oder 150 verrichtet, und da man für jedes Tagwerk einen Arbeiter braucht, so werden es 150 Arbeiter seyn müssen.

Brüche noch angeben zu wollen, ist, wie ich oben schon bemerkt habe, für den gegenwärtigen Zweck nicht mehr nothwendig; dagegen können die nächstfolgenden Aufgaben auf die Bestimmung der Tage und Stunden ausgedehnt werden. Z. B.

Wenn 10 Arbeiter bey täglich 10 Stunden Arbeit ein gewisses Werk vollenden, wie lange werden 3 Arbeiter, die täglich 15 Stund arbeiten, an einem eben so großen Werke zu thun haben?

Auflösung. 10 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, werden jeden Tag 100 Stundwerke verrichten, und in 10 Tagen 10 mal so viel oder 1000; die 2ten 3 Arbeiter arbeiten in einem Tag nur 45 Stundwerke; so oft nun diese 45 Stundwerke in 1000 enthalten sind, so oft werden sie in einem Tag haben, und dieses macht $22\,{}^{10}/_{45}$ verkleinert $22\,{}^{2}/_{9}$.

Will man dem Schüler einen Wink geben, auf welche Weise er mit Leichtigkeit im Kopf finden könne, wie oft 45 in 1000 enthalten sey, so sagt man ihm nur, er solle sehen, wie viel Zehner 45 und wie viel 1000 habe, für 45 wird er 4 und für 1000 aber 100 finden; 4 sind in 100 wohl 25 mal enthalten, aber bey den 4 Zehnern sind noch 5 Einer, folglich sind sie weniger als 25 mal darin enthalten. Nothwendig ist aber dieser Wink von Seite des Lehrers nicht. Er thut besser, wenn er es umkehrt, und den Schüler fragt, wie er dieses wohl auf die kürzeste und einfachste Weise finden könne? Der eine wird die eine Auflösungsart angeben, der andere aber eine, die von der ersten verschieden ist, und es wird nicht fehlen, die Schü=

ler fallen von selbst, nebst manchen andern, auch auf die oben angegebene Erleichterungsweise.

Wenn 6 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, ein gewisses Werk in 20 Tagen verrichten, wie viele Arbeiter werden die nämliche Arbeit in 3 Tagen, bey täglich 10 Stunden Arbeit, machen?

Auflösung. Die 6 Arbeiter machen in 20 Tagen, bey täglich 8 Stunden Arbeit, dieses Werk, oder nach obiger Auflösung, in 20 mal 6 oder 120 Tagen und in 8 mal so viel Stunden gleich 960 Stunden. Die 2te Arbeit erfordert eben so viele Stunden; jeder Arbeiter arbeitet in den 3 Tagen 3 mal 10 oder 30 Stunden, und so oft die 30 Stunden in 960 enthalten sind, so oft wird man einen Arbeiter nöthig haben, oder 32 Arbeiter. Nach der letzten Abkürzung wird der Schüler die 30 in 3 Zehner und die 960 in 964 verwandeln; 3 sind in 96, 32 mal enthalten. — Diese letzte Aufgabe kann auch als Probe der vorhergehenden betrachtet werden.

Mehrerley Auflösungsarten über ein und dieselbe Aufgabe hier den Schüler noch machen lassen zu wollen, wird je nach dem Grad seines Vorrückens entbehrlich. Hingegen kann der Lehrer, nachdem der eine oder andere seiner Schüler diese letzte Auflösung gemacht haben wird, noch Fragen an dieselben stellen. Z. B. hat allenfalls einer von euch diese letzte Aufgabe auf eine andere Weise gelöst? In diesem Fall mag er dann jeden von ihnen anhalten, seine Auflösungsweisen seinen Mitschülern vorzulegen.

Es ist sehr bildend für den Schüler, in die Ansichten und Begriffe eines andern einzutreten, besonders wenn ein Schüler auf der nämlichen Stufe der Bildung steht, und eine verwickelte Auflösung in einem ununterbrochenen Zusammenhang von einem von ihnen vorgetragen wird. Der Schüler wird dadurch genöthigt, auf der Stelle einzudringen und die ganze Behandlungsart im erstenmal aufzufassen und zu begreifen. Dieses ist eigentlich das wahre Bollwerk gegen jede Art von Einseitigkeit in der Verhärtung der Jugend. Daß auch in der Erziehung und im Unterricht hierüber gewacht werden muß, wird Niemand in Abrede stellen, und dieses ist vorzüglich in Fächern nothwendig und wichtig, die eine sehr gebildete Geisteskraft ansprechen. Ich gehe weiter.

In den letzten Aufgaben können auch die Stunden, welche erfordert werden, noch als unbekannt angegeben werden. Man muß aber bey diesen Kopfrechnungsübungen weder in Brüche noch andere Zahlbestimmungen eintreten.

Werden 10 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, in 6 Tagen ein gewisses Werk vollenden, und will man mit 20 Arbeitern die nämliche Arbeit in 2 Tagen verrichtet haben, wie viele Stunden müssen diese letzten Arbeiter dann täglich arbeiten?

Auflösung. Wenn 10 Arbeiter in 6 Tagen, bey täglich 8 Stunden Arbeit, ein Werk vollenden, so werden zu dieser Arbeit 480 Stundenwerk erfordert. Die zweyten Arbeiter müssen ebenfalls so viel Stundwerke zu verrichten haben, und zwar mit 20 Arbeitern in 2 Tagen oder in 40 Tagwerken; sollen aber 40 Tagwerke 480 Stundwerk betragen, so kommt auf ein Tagwerk der 40ste Theil davon oder 12 Stunden.

Will man den Schüler zur Probe anhalten, so kann man die letzte Frage nur so ausdrücken, daß das in der vorletzten Aufgabe ihm unbekannte als bekannt 2c. gegeben wird. Den Schüler auf diesem Wege zur Probe führen zu wollen, kann aber hier ganz als entbehrlich angesehen und nur gefragt werden, wie er hierüber die Probe machen könne. Wird er auf diese Frage sogleich richtig und bestimmt antworten, so ist eine wirkliche Ausführung davon nicht nothwendig. Alle diese Aufgaben können auch noch mit folgenden Bestimmungen, im Leben vorkommen, die Auflösung selbst nicht schwierig und verwickelt machen, welches folglich nur als ein kleiner Zusatz angesehen und behandelt werden darf.

Frage. Wenn 10 Arbeiter in 4 Tagen eine gewisse Arbeit verrichten, in wie viel Tagen werden 9 Arbeiter eine Arbeit machen, die 2mal so groß ist als die erste, oder die halb so groß ist, oder 2½ mal so groß u. s. w.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist den obigen sehr ähnlich und hat nur den Beysatz, daß man am Ende für das 2 mal so große Werk auch alles 2 mal, für ein halb so großes, alles ein halbmal u. s. w. nimmt. Daß diese Bestimmung auf alle obigen Aufgaben ausgedehnt werde, geht klar aus der letzten Frage hervor. Als verschieden von diesen Fragen mag noch folgende eine Stelle hier finden.

Zehn Arbeiter machen in 5 Tagen, bey 8 stündiger Arbeit, ein gewisses Werk, 12 Arbeiter machen ein 2tes Werk in 4 Tagen, bey 10 stündiger Arbeit, es fragt sich, in welchem Verhältniß diese 2 Arbeiten zu einander stehen? Ich brauche nicht zu bemerken, daß hier nur die Größe der Arbeiten in Anschlag kommt, und nicht daß die allfälligen Schwierigkeiten und eine größere Kraftanstrengung dadurch bestimmt und berechnet werde.

Auflösung. Machen 10 Arbeiter in 5 Tagen, bey 8 stündiger Arbeit, ein gewisses Werk, so werden 400 Werkstunden dazu erfordert; für das 2te Werk bedarf man aber 480 Werkstunden; so oft man zu der 2ten Arbeit so viel Stundwerke bedarf, als zur 1ten, so oftmal ist es auch eben so groß; 400 sind in 480 ein und $^{80}/_{400}$ oder $1\,^{1}/_{5}$ mal enthalten, folglich ist es auch $1\,^{1}/_{5}$ mal so groß als das erste Werk.

Um einen vollständigen Typus aufzustellen, wie einerseits die verschiedenen Anwendungen und Aufgaben gebildet werden können, anderseits auch, wie die Probe gemacht werden muß, mag folgendes hier am rechten Orte stehen. Die Aufgaben können so gestellt werden, daß

a) die ersten Arbeiter unbekannt sind, oder

b) daß die 2ten Arbeiter als unbekannt angegeben werden,

c) daß die Stunden, welche die 1ten Arbeiter täglich arbeiten, unbekannt sind,

d) daß die Stunden, welche die 2ten Arbeiter täglich arbeiten, unbekannt sind,

e) daß die Anzahl der Tage, welche die 1ten Arbeiter zu arbeiten haben, unbekannt ist, oder endlich

f) daß die Anzahl der Tage, welche die zweyten Arbeiter zu arbeiten haben, unbekannt sind.

Will der Lehrer die geistige Kraft seines Schülers in eine vorzügliche Thätigkeit setzen; so fordert er ihn auf, die obige Frage unter allen den Gesichtspunkten, von a bis zu f, selbst aufzustellen, und dieselben an seine Mitschüler in wirkliche Fragen zu verwandeln.

Es ist für diesen Fall nicht einmal nothwendig, daß alle diese Aufgaben von seinen Mitschülern noch einmal gelöst werden. Die Fähigkeit und Tüchtigkeit, welche sich der Schüler dadurch erwirbt, Lehrer seiner Mitschüler zu werden, ist eine Hauptsache, welche dadurch erreicht werden kann und auch erzielt werden soll.

Um den Lehrer aber hinlänglich mit Stoff und Anleitung zu versehen, werden zu den obigen Aufgaben noch ein paar Beyspiele nicht überflüssig.

Frage. Eine gewisse Anzahl Arbeiter machen, in 5 Tagen, bey täglich 8 Stunden Arbeit, ein Werk, wovon ein, 1 ⅕ mal so großes in 4 Tagen durch 12 Arbeiter, bey 10 Stunden Arbeit, verfertigt wird; es fragt sich, wie viele Arbeiter zum ersten Werke erfordert werden?

Frage. Wenn 10 Arbeiter in 5 Tagen, bey 8 stündiger Arbeit, ein gewisses Werk machen, wie viel Arbeiter werden erfordert, wenn in 4 Tagen, bey 10 stündiger Arbeit, ein Werk, das 1 ⅕ mal so groß ist, gemacht werden soll?

Zehn Arbeiter, deren Stundenzahl der Arbeit unbekannt ist, machen in 5 Tagen ein gewisses Werk, das von 12 Arbeitern in 4 Tagen, bey 10 stündiger Arbeit, und 1 ⅕ mal so groß ist als das erste, gemacht wird; es fragt sich, wie viele Stunden die ersten Arbeiter täglich gearbeitet haben?

Aus diesen wenigen Beyspielen geht auf eine klare

Weise hervor, wie bildend die Darstellung für den Schüler werden kann. Um diesem die größtmögliche Vielseitigkeit zu geben, wird man wohl thun, ihn schriftlich und zwar wörtlich auf seine Schiefertafel, wie oben geschehen ist, ähnliche Aufgaben zur Abwechslung darstellen zu lassen. — Die obigen Beyspiele auf Lebensverhältnisse angewandt.

Frage. Wenn man von 10 Zentnern, auf 4 Stunden weit zuführen, 3 fl. Fracht bezahlt, wie viel wird man von 16 Zentner auf 20 Stunden weit zu bezahlen haben?

Auflösung. Zahlt man von 10 Zentnern auf 3 Stunden weit 3 fl.; so wird man von einem Zentner auf 4 Stunden Weg auch den 10ten Theil von 3 fl. oder $^3/_{10}$ fl. zu bezahlen haben, und auf eine Stunde, welche der 4te Theil von vier Stunden ist, auch den 4ten Theil von $^3/_{10}$ oder $^3/_{40}$ fl., von den 16 Zentner auf eine Stunde 16 mal $^3/_{40}$ oder $^{48}/_{40}$ gleich $1\,^1/_5$ und auf 20 Stunden weit also 20 mal $1\,^1/_5$ oder 24 fl.

Auf eine zweyte Art gelöst.

Wenn man 10 Zentner 4 Stunden weit für 3 fl. führt, so führt man 10 mal 4 oder 40 Zentner eine Stunde weit für 3 fl., und für 16 Zentner 20 Stunden weit führt man 20 mal 16 Zentner gleich 320 Zentner, und so oft 40 Zentner in 320 enthalten sind, so oft wird man auch 3 fl. zu bezahlen haben, 40 ist in 320, 8 mal enthalten; folglich hat man 8 mal 3 fl. zu bezahlen oder 24 fl.

Daß auch hier noch mehrere sehr verschiedene Auflösungen gemacht werden können, die sich von den obigen sehr unterscheiden, unterliegt keinem Zweifel, doch sind sie nicht so wesentlich.

Wenn man von 10 Zentnern auf 4 Stunden Weg 3 fl. bezahlt, wie weit kann man 16 Zentner für 24 fl. führen? Diese Aufgabe kann als Probe der obigen dienen.

Auflösung. Nach der vorhergehenden Auflösung wissen wir, daß man von einem Zentner auf eine Stunde $^3/_{40}$ fl. bezahlt, oder aber, daß man nach dieser Angabe 40 Zentner eine Stunde weit für 3 fl. führt; von den 16 Zentnern zahlt man auf eine Stunde also 16 mal $^3/_{40}$, oder $^{48}/_{40}$ oder $1\,^1/_5$; so oft also diese $1\,^1/_5$ in den 24 Gulden enthalten sind, so oft kann man sie eine Stunde weit führen; $1\,^1/_5$ sind $^6/_5$, und 24 gleich $^{120}/_5$, $^6/_5$ sind in $^{120}/_5$, 20 mal enthalten, folglich kann man auch 20 Zentner führen.

Wenn man von 10 Zentnern auf 4 Stunden Weg 3 fl. bezahlt, und sie eine unbekannte Anzahl Stunden für 24 Gulden geführt hat, so fragt es sich, wie viele Stunden dieses seyen?

Auflösung. Zahlt man für 10 Zentner auf 4 Stunden Weg 3 fl.; so wird man nach der ersten Auflösungsart dieser Aufgabe $^3/_{40}$ fl. von einem Zentner auf eine Stunde zu bezahlen haben, nach der zweyten aber 40 Zentner eine Stunde weit für 3 fl. führen können; folglich wird man von 16 Zentnern 16 mal $^3/_{16}$ oder $^{48}/_{16}$ gleich $1\,^1/_5$ auf die Stunde zu bezahlen haben, und so oft $1\,^1/_5$ in 24 enthalten ist, so oft mal kann man sie auch eine Stunde weit führen; dieses ist 20 mal darin enthalten, also kann man sie auch 20 Stunden weit führen. Diese Aufgabe und deren Lösung dient ebenfalls wieder als Probe, und soll zur Abwechslung auch als solche behandelt werden.

Eine weitere Ausführung kann ganz nach der Norm, die bey den Aufgaben mit den Arbeitern aufgestellt worden ist, statt finden, besonders diejenigen Beyspiele, die als Typus der Probe angeführt wurden. Jeder Schüler wird jetzt ohne weitere Hülfe des Lehrers dieses auch wirklich auszuführen im Stande seyn. Brüche aber zu den Zahlen noch setzen zu wollen, wäre ganz gegen das was hier durch diese Anwendungsaufgabe erzielt werden muß. Es ist daher nicht nur bey diesen, sondern auch bey allen folgenden Aufgaben, die als Kopfrechnungsübungen aufgestellt sind, nothwendig, daß diese Bruchverhältnisse ein für allemal wegbleiben müssen, wenn ich auch die Bemerkung nicht wiederholen sollte.

Die Zusätze, die bey den Arbeitern statt gefunden haben, können auch auf diese Aufgaben ausgedehnt werden. Wie z. B. in letzter Aufgabe kann man fragen, wie viel von dieser oder jener Anzahl Zentner bezahlt werden müsse, wenn man 2, 3 mal so viel als von den ersten zu bezahlen habe, oder wenn man $^1/_2$, $^1/_3$, $2\,^1/_2$ so viel bezahlen müsse. Viele Fragen mit diesen Zusätzen und Erweiterungen dürfen nicht statt finden.

Zum Beschluß dieser Art Aufgabe gebe ich noch folgende.

Man zahlt von 10 Zentnern auf 4 Stunden Weg 2 fl., von 15 Zentnern auf 3 Stunden Weg aber 4 fl., es fragt sich, in welchem Verhältniß die Fracht der ersten Waare zu derjenigen der zweyten stehe; oder wie viel man von der zweyten mehr bezahle als von der ersten?

Auflösung. Wenn man von 10 Zentnern auf 4 Stunden Weg 2 fl. bezahlt, so wird man, nach den obigen Auflösungen, von 40 Zentnern auf eine Stunde Weg 2 fl. zu bezahlen haben; von der 2ten Waare aber von 45 Zentner auf eine Stunde 4 fl., von der letzten führt man $1\,{}^1/_8$ mal so viel als von der ersten in gleicher Entfernung, und würde man eben so viel bezahlen, so gäbe es $1\,{}^1/_8$ mal 2 fl. oder $2\,{}^1/_4$ fl.; folglich verhält sich das was man für die erste Waare bezahlt zu dem was man für die zweyte geben muß, wie $2\,{}^1/_4$ zu 4 oder wie 9 zu 16.

Auch diese Aufgabe kann auf sehr verschiedene Arten gelöst werden. — Die gleichen Aufgaben auf andere Lebensverhältnisse angewandt.

Frage. Wenn man von 100 fl. Kapital jährlich 5 fl. Zins bezahlen muß; wie viel wird man von 480 fl. in 2 Jahren bezahlen müssen.

Auflösung. Zahlt man von 100 fl. Kapital jährlich 5 fl. Zins, so werden die 480 fl. so oft mal 5 fl. Zins abtragen, als 100 darin enthalten sind; 100 sind in 480, $4\,{}^{80}/_{100}$, oder $4\,{}^4/_5$ mal enthalten; man muß also auch $4\,{}^4/_5$ mal 5 davon in einem Jahr bezahlen, welches jährlich 24 fl. und in 2 Jahren 2 mal 24 oder 48 fl. Zins ausmacht.

Auf eine zweyte Art gelöst.

Wenn man in einem Jahr von 100, 5 bezahlt; so wird man von dem 100 in zwey Jahren 2 mal 5 oder 10 bezahlen, und 480 sind 4 $^4/_5$ mal 100, also auch 4 $^4/_5$ mal 10 oder 48 fl. Zins.

Auf eine dritte Art gelöst.

Das erste Kapital verhält sich zum zweyten, wie 100 zu 480, oder wie 5 zu 24; also muß der Zins des ersten oder 5 sich zum zweyten verhalten, wie 5 zu 24, und die Zeit des ersten verhält sich zur Zeit des zweyten, wie 1 zu 2; also muß der Zins von einem Jahr oder 24 fl. in dem nämlichen Verhältniß stehen, welches wieder 48 giebt.

Wird man diese 3 Auflösungen etwas näher prüfen, so kann es niemanden entgehen, daß auch bey diesen Arten von Aufgaben mit der größten Leichtigkeit etwa 7 bis 8 verschiedene Auflösungen gemacht werden können.

Wenn 100 fl. Kapital, jährlich 5 fl. Zins abtragen, und man von 400 fl. Kapital 60 fl. Zins bezieht; wie lang ist letzte Summe angelegt gewesen.

Auflösung. Tragen 100 fl. Kapital jährlich 5 fl. Zins ab, so werden die 400 fl. Kapital in einem Jahr so oft 5 abtragen, als 100 darinn enthalten sind, 100 sind 4 mal darin enthalten, also tragen sie 4 mal 5 oder 20 fl. Zins in einem Jahr ab, und so oft 20 in 60 enthalten ist, so oft hat man dieses Kapital ein Jahr lang am Zins gelassen, 20 sind in 60, 3 mal enthalten, folglich sind sie 3 Jahre lang am Zins gelegen.

Diese Aufgabe und ihre Lösung kann auch als Probe der vorhergehenden dienen.

Werden 100 fl. Kapital jährlich 5 fl. Zins abtragen, wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 2 $^1/_2$ Jahr 200 fl. Zins abtragen wird.

Auflösung. Wird angenommen, daß 100 fl. jährlich 5 fl. Zins abtragen, so werden sie in 2 $^1/_2$ Jahr 2 $^1/_2$ mal 5, gleich 12 $^1/_2$ fl. Zins abtragen, und so oft 12 $^1/_2$ in den 200 fl. Zins enthalten sind, so oft wird hiezu ein Kapital von 100 fl. erfordert; diese 12 $^1/_2$ oder $^{25}/_2$ sind in 200 Ganzen, oder $^{400}/_2$, 26 $^2/_3$ mal enthalten; folglich auch so oft mal 100, welches 2666 $^2/_3$ macht.

Auch diese Aufgabe und ihre Lösung kann als Probe der zwey vorhergehenden Fragen angesehen und wieder als solche behandelt werden.

Haben 200 fl. Kapital in 2 $^1/_2$ Jahren 30 fl. Zins abgetragen und 340 fl. Kapital in 3 Jahren 48 fl.; so fragt es sich welches Kapital zu einem höheren Zins angelegt sey?

Auflösung. Wenn 200 fl. Kapital in 2 $^1/_2$ Jahr 30 fl. Zins abtragen, so werden 100 fl. in eben diesem Zeitraum 15 fl. Zins abtragen; ein Jahr ist von 2 $^1/_2$ Jahren $^2/_5$, also auch 2 fl. von 15 oder 6 fl. Zins.

Tragen aber 340 fl. in 3 Jahren 48 fl. Zins ab, so kommt auf 100, $^{100}/_{340}$ oder $^5/_{17}$ von 48, gleich 14 $^2/_{17}$, dieses aber in 3 Jahren, folglich kommt auf ein Jahr der dritte Theil davon, oder 4 $^{19}/_{81}$.

Man will ein Kapital anlegen, welches in 1 $^1/_2$ Jahr 110 fl. Zins abträgt, das 100 zu 4 Proc. es fragt sich, wie groß das Kapital sey?

Auflösung. Wenn man in 1 $^1/_2$ Jahr 110 Gulden Zins haben will, so wird man in einem Jahr $^2/_3$ von dieser Summe erhalten müssen; denn ein Jahr ist von 1 $^1/_2$ Jahr $^2/_3$, und $^2/_3$ von 110 beträgt 73 $^1/_3$; so oft man 4 Gulden Zins haben will, muß man ein Kapital von 100 fl. anle=

gen, 4 sind in 73⅓, 18⅓ mal enthalten, also muß man auch 18⅓ mal 100 fl. Kapital anlegen, welches 1833⅓ fl. giebt.

Bey alle diesen Aufgaben ist der Zins immer von einem Jahr angegeben, und eben so vom Jahr gesucht worden. Das Jahr wird aber auch in Monate, Wochen rc. eingetheilt, und so kann der Zins dieser Jahreseintheilung gesucht werden, worüber ein paar Beyspiele folgen.

Wenn 100 fl. in einem Jahr 4 fl. Zins abtragen, wie viel werden 200 fl. Kapital in einem Monat oder in einer Woche rc. abtragen.

Auflösung. Nach obigen Auflösungen werden die 200 fl. in einem Jahr 10 fl. Zins abtragen, ein Monat ist von einem Jahr der 12te Theil, also auch der 12te Theil von 10 fl. oder $\frac{5}{6}$ fl. Für eine Woche nimmt man den 52sten Theil, welches $\frac{5}{26}$ fl. giebt. Für einen Tag den 365sten Theil von 10 fl. oder $\frac{10}{365} = \frac{2}{73}$ fl. Die Auflösung dieser Brüche in Batzen geschieht auf die nämliche Weise, wie früher bey dem Bruch schon gezeigt worden ist. Als Beleg hievon noch folgende Verwandlung: $\frac{2}{73}$ fl. machen wie viele Kreuzer, $\frac{1}{73}$ fl. ist der 73ste Theil von 60 kr., gleich $\frac{60}{73}$ kr. und für $\frac{2}{73}$ fl. giebt es 2 mal $\frac{60}{73}$ oder $\frac{120}{73}$ kr. oder $1\frac{47}{73}$ kr., diese $1\frac{47}{73}$ kr. können eben so wieder in Heller verwandelt werden.

Obige Frage umgekehrt, wie folgt. Wenn 100 fl. Kapital in einem Tag 1 kr., oder in einer Woche einen Zehntels-Gulden, oder in einem Monat 24 kr. Zins abtragen; zu wie viel ist das 100 in dem einen oder andern Fall angelegt worden?

Die Auflösungsweise dieser Aufgabe ist derjenigen der vorhergehenden ganz ähnlich.

Wie groß muß ein Kapital seyn, welches zu 5 Procent angelegt ist, wenn es in einem Tag einen Gulden Zins abtragen soll, oder wenn es in einer Woche so viel abtragen muß, oder wenn es endlich auch in einem Monat einen Gulden Zins abzutragen hat?

Auflösung. Soll dieses Kapital alle Tage einen Gulden abtragen, so wird es im Jahr 365 fl. Zins abtragen, und so oft diese Summe 5 fl. macht, so oft erfordert es ein Kapital von 100, und 5 ist in 365 73 mal enthalten, folglich auch 73 mal 100 oder 7300. Desgleichen mit den Wochen und Monaten.

Würde man zu den Jahren noch Monate, Tage, Stunden, Minuten ꝛc. setzen wollen, so dürften Aufgaben dieser Art als zu verwickelt für das Kopfrechnen angesehen, und müßten für das Zifferrechnen aufbehalten werden.

Welches Kapital ist zu einem höhern Zins angelegt worden, von dem man von 300 fl. in $2\frac{1}{2}$ Jahren 45 fl. Zins, oder das Kapital von 100 fl., welches in einem Tag einen Kreuzer abträgt?

Auflösung. Werden die 300 fl. in $2\frac{1}{2}$ Jahre 45 fl. Zins abwerfen, so werden sie in einem Jahr, welches $\frac{2}{5}$ von $2\frac{1}{2}$ Jahr ist, auch $\frac{2}{5}$ von 45 fl. abtragen, oder 18 fl. Zins und zwar von 300 fl.; 100 ist von 300 der dritte Theil, also auch der dritte Theil von 18 fl. oder 6 fl.; das zweyte Kapital tragt mit 100 fl. in einem Tag einen Kreuzer, und in einem Jahr 365 mal den Kreuzer, oder 6 fl. 5 kr.

Daß bey diesen Aufgaben noch eine Menge anderer

Lebensverhältnisse angegeben werden können und dürfen, geht aus obigen Fragen hervor; es darf aber hier nicht mehr weiter ausgedehnt werden, wenn das Wesen der Kopfrechnungsaufgaben nicht aus den Augen gelassen werden soll. Alles, was für den Lehrer bey den frühern Aufgaben bemerkt und für den Schüler als wichtig erklärt worden ist, kann und soll auch hier in der ganzen Ausdehnung seine Anwendung finden. So wie die Bildung des Schülers zunimmt, so müssen auch die Anforderungen, die an ihn gemacht werden, immer höher gehen. So dürfen von dem Lehrer jetzt weniger Aufgaben und Fragen an die Schüler gerichtet werden, als dieses die Schüler selbst unter einander thun sollen. Die Entbehrlichkeit des Lehrers muß bey einer naturgemäßen Führung in dem Grad zunehmen, als die Bildung des Schülers vorschreitet. Bey vollendeter Bildung muß derselbe, so weit er geführt worden ist, auch vollendeter Lehrer in alle dem seyn, was er auf diese Weise gelernt und sich eigen gemacht hat. Auf diesem Wege ist es allein möglich, daß ein also gebildeter Schüler nicht nur einst als Vater im Stande seyn wird, seine geistigen Vaterpflichten zu erfüllen, sondern jetzt schon in der Schule und in der Familie zur bildenden Nachhülfe für seine Mitschüler und Geschwister nützlich und unentbehrlich wird. Ich bitte diesfalls das, was ich in der Vorrede sagte, mit dieser Bemerkung in Zusammenhang zu bringen.

Ich schreite zu den folgenden Anwendungsaufgaben, die auf die nämliche Weise eingeübt werden müssen, über.

Zwey Personen fangen eine gemeinschaftliche Unternehmung an; die erste giebt zu diesem Geschäfte 100 fl., die

die zweyte aber 400 fl., und in einer gewissen Zeit haben sie mit einander 160 fl. gewonnen; es fragt sich, wie viel einer jeden Person davon gehöre?

Auflösung. Die zweyte Person legt 4 mal so viel ein als die erste, also gehört ihr auch 4 mal so viel Gewinn; oder die erste Person erhält einen Theil des Gewinns, wie die zweyte deren 4, welches zusammen 5 gleiche Theile giebt; der fünfte Theil von 160 ist 32, der erste hat einen solchen Theil, und der zweyte 4, oder 4 mal 32 gleich 128 Gulden.

Auf eine zweyte Art gelöst.

Die Einlage der ersten Person in dieses gemeinschaftliche Unternehmen ist von derjenigen der zweyten ¼; also muß auch ihr Gewinn ¼ vom Gewinn der zweyten Person seyn. Ein Ganzes in Viertel verwandelt giebt 4 Viertel; die erste hat einen solchen Theil, zusammen also 5 Theile, mit denen sie 160 fl. gewinnen. Demnach gehört der ersten Person ein solcher Theil, der zweyten aber vier derselben u. s. w. —

Auf eine dritte Art gelöst.

Die Einlage der ersten und diejenige der zweyten Person zusammen genommen, verhalten sich zum Gewinn von beyden, wie die Einlage der ersten, oder 100 mehr 400 verhalten sich zu 160 wie 100 zu welcher Zahl?

Daß auch diese Aufgabe unter der gegenwärtigen Form auf 7 verschiedene Arten gelöst werden kann, habe ich gleich im Anfang der angewandten Zahlverhältnisse in ein heiteres Licht gesetzt, und darf daher nur auf diese

Ausführung hier aufmerksam machen. Alle diese verschiedenen Auflösungen, die dort ausgeführt worden sind, dürfen und sollen auf keinen Fall hier in diesem Umfang wiederholt werden. Angenommen aber, die erste Person habe obige Summe auf 2 und die zweyte auf 3 Jahr in diese Unternehmung gelegt, und am Ende dieser Zeit einen Gewinn von 160 fl. gemacht; es fragt sich, wie viel einem jeden davon gehöre?

Auflösung. Wird die erste Person 100 fl. auf 2 Jahre in irgend eine Unternehmung einlegen, so müßte sie 2 mal so viel auf ein Jahr in dieselbe bringen, um den gleichen Gewinn zu erhalten; denn in 2 Jahren würde diese Einlage 2 mal den Zins abtragen, und 2 mal die gleiche Summe auf ein Jahr eingelegt, giebt ebenfalls 2 mal diesen Zins, oder 200 fl. für ein Jahr; die zweyte Person hingegen müßte auf ein Jahr, um den nämlichen Anspruch auf den Zins zu erhalten, 3 mal 400 oder 1200 fl. in diese Unternehmung thun. Es kann also angenommen werden, die erste Person lege 100 fl. auf 2, oder 200 fl. auf ein Jahr; die zweyte aber 400 auf 3, oder 1200 auf ein Jahr in diese Unternehmung ein. Diese Aufgabe einmal so weit gelöst, darf als eine Frage in's Auge gefaßt werden, die der letzten ganz gleich ist, und jede der 3 obigen Auflösungen sind anwendbar.

Der Kürze wegen führe ich dieselbe auch nicht weiter aus; ich verweise also nur auf die letzten Auflösungen und füge noch bey: die jetzige Aufgabe kann für diesen Endzweck in folgende umwandelt werden. Die eine Person ist so zu behandeln, wie wenn sie 200 fl., die andere aber wie wenn sie 1200 fl. auf gleiche Zeit eingelegt hätte.

Wären in der letzten Aufgabe statt 2 und 3 Jahr, Brüche, oder Ganze und Brüche von Jahren angegeben worden, so ist alsdann folgende Auflösungsweise hiefür die geeigneteste.

Angenommen, die erste Person habe diese Summe auf ein halb, die zweyte aber auf ein drittels Jahr eingelegt, so wird man wohlthun, die Einlage von jeder derselben wieder, wie oben, auf ein Jahr zurück zu führen. Z. B. legt die erste Person auf ein halb Jahr eine gewisse Summe in die Unternehmung, so hätte dieselbe nur die Hälfte von 100 fl. auf ein Jahr einzulegen; denn in einem halben Jahr trägt die Einlage die Hälfte irgend eines Zinses, und die Hälfte der Einlage würde in einem Jahr auch die Hälfte des Zinses geben; also müßte die erste Person auf ein Jahr 50 fl., die zweyte aber auf die nämliche Zeit ein Drittel von 400 fl. oder 133⅓ fl. auf gleich lange Zeit in irgend eine Unternehmung einzulegen haben. Die weitere Auflösung findet nach einer der obigen drey Normen statt.

Wären aber zwey Drittels Jahr für die erste und ¾ Jahr für die zweyte angegeben worden, so würde die letzte Aufgabe auf folgende Weise gelöst werden:

Legt die erste Person 100 fl. auf zwey Drittels Jahr, so kann sie auf ein Jahr nur ⅔ von der Summe von 100 fl. in diese Unternehmung thun, oder 66⅔ fl., und wird den gleichen Anspruch auf den Gewinn erhalten; denn in ⅔ Jahren erhält dieselbe ⅔ des Zinses von einem Jahr, oder wenn sie $\frac{2}{3}$ der Summe auf ein Jahr einlegen würde, so erhielte sie auch $\frac{2}{3}$ dieses nämlichen Zinses oder hier als Gewinn ausgedrückt; die zweyte Person muß aber $\frac{3}{4}$ von 400 fl. aus den nämlichen Gründen auf ein Jahr in diese Unternehmung thun. Obige Aufgabe wäre dadurch in folgende umwandelt und müßte also ausgedrückt werden: Die erste Person legt in dieselbe auf ein Jahr $66\frac{2}{3}$ fl., die zweyte aber 300 fl., und sie gewinnen zusammen 160 fl.; es fragt sich, wie viel einer jeden davon gehöre? Die Auflösung wird den vorhergehenden ganz gleich seyn.

Hätte die erste Person auf $1\frac{1}{2}$ Jahr, die zweyte aber auf $2\frac{1}{3}$ Jahr diese Summe in die Unternehmung gelegt, und wieder 160 fl. gewonnen; so fragt es sich, wie viel einer jeden davon gehöre?

Soll die erste Person in einem Jahr den gleichen Gewinn, den sie in einem halben Jahr erhält, bekommen, so muß sie $1\frac{1}{2}$ mal 100 fl. einlegen, oder 150 fl.; denn in $1\frac{1}{2}$ Jahr erhält sie $1\frac{1}{2}$ mal den Zins, und $1\frac{1}{2}$ mal diese Summe wird in einem Jahr ebenfalls den gleichen Zins abtragen. Die zweyte Person aber wird in einem Jahr $\frac{7}{3}$ mal 400 fl. in diese Unternehmung aus den nämlichen Gründen legen müssen, oder $\frac{7}{3}$ mal 400 fl. $= 933\frac{1}{3}$. Die weitere Auflösung ist den obigen gleich.

Wäre angegeben, die erste Person lege es auf 2 Jahr und 3 Monate, und die zweyte auf 10 Monate in dieselbe; so müßte wieder alles auf ein Jahr, oder wenn man es vorziehen sollte, so könnte es auf einen Monat zurückgeführt werden. Um obige Aufgabe auf ein Jahr zurückzuführen, dürfte sie nur auf folgende Art ausgedrückt und gelöst werden.

Zwey Jahr und 3 Monat machen $2\frac{1}{4}$ Jahr, also müßte die erste auf ein Jahr $2\frac{1}{4}$ mal 100 fl. oder 225 fl.; die zweyte aber $\frac{5}{6}$ mal 400 fl. oder $333\frac{1}{3}$ fl. u. s. w. einlegen.

Will man alles auf einen Monat zurückführen, so muß der Monat, wie das Jahr, in's Auge gefaßt und ganz ähnlich, wie wenn es Jahre wären, behandelt werden.

Da man aber bey dieser Auflösungsart hohe Zahlen erhalten würde, so ist dieselbe als Kopfrechnungsübung nicht vorzuziehen. Aus diesem Grunde aber darf es nicht auf die Seite gesetzt werden, denn die Ziffern können als Erinnerungsmittel, wie ich früher schon zeigte, auch eine Stelle finden.

Statt bey den Jahren Brüche und Ganze von verschiedenen Benennungen anzugeben, könnte das nämliche auch noch bey ihren Einlagen geschehen; dieses ist jedoch nicht nothwendig, indem es auf gegenwärtiger Stufe nur als eine Zahlcombination zu betrachten wäre, die jetzt mit vollem Recht als überflüssig angesehen und behandelt werden muß.

So wie in allen diesen Aufgaben die Vertheilung des Gewinns als das unbekannte Verhältniß oder als die unbekannte Größe angesehen worden ist, kann auch ihre Einlage, oder Zeit, als unbekannt angegeben und allen obigen Abwechslungen unterworfen werden. Z. B.

Zwey Personen fangen eine Unternehmung an; die Einlage beyder ist unbekannt; indem sie es aber auf gleich lange Zeit in diese Unternehmung einlegen, gewinnt die erste Person 50 fl. und die zweyte 300 fl., ihre Totaleinlage ist 4000 fl.; es fragt sich, was eine jede eingelegt habe?

Auflösung. Wird die erste Person 50 fl. gewinnen, während die andere 300 fl. gewinnt; so muß die Einlage der ersten Person auch in gleichem Verhältniß zu derjenigen der zweyten stehen, wie ihr Gewinn; oder wie 50 zu 300 (verkleinert wie 1 zu 6); also hat die erste Person einen Theil der Einlage, wie die zweyte deren 6 erhalten wird; die ganze Einlage ist 4000 fl. und ihre sämmtlichen Theile machen zusammen sieben aus; es kommt diesem zufolge auf einen Theil der Siebentel von 4000 fl. oder 571$\frac{3}{7}$ fl.; die erste Person erhält einen solchen Theil und die zweyte 6 derselben, oder 3428$\frac{4}{7}$ fl. Auch kann diese Aufgabe durch das geometrische Verhältniß unter 7 verschiedenen Formen, wie wir gleich anfangs beym angewandten Kopfrechnen gesehen haben, gelöst werden. Will man hierüber nähern Aufschluß, so darf man die früher aufgestellten Auflösungen zu Rathe ziehen. Brüche angeben zu wollen, kann als ganz überflüssig übergangen werden.

Angenommen, es wäre in obiger Aufgabe angegeben, daß die erste Person 50 fl. in einem Jahr, die andere aber 300 fl. in 2 Jahren gewinne, und ihre gesammte Einlage wieder 4000 fl. betrage; so fragt es sich, wie viel eine jede eingelegt habe?

Folgende ist eine der einfachsten Auflösungen.

Gewinnt die erste Person in einem Jahr 50 fl., und die zweyte in 2 Jahren 300 fl.; so wird die zweyte in einem Jahr die Hälfte von 300 fl., oder 150 fl. gewinnen; folglich 3mal so viel als die erste Person in der nämlichen Zeit; sie muß demnach auch 3mal so viel eingelegt haben, als die erste, oder es kommt auf die erste Person ein Theil von der Einlage, während dem auf die zweyte drey derselben kommen, welches zusammen 4 gleiche Theile ausmacht, die mit einander eine Totaleinlage von 4000 fl. betragen; der vierte Theil von 4000 fl. ist 1000. Die erste Person hat einen solchen Theil, und die zweyte drey, oder 3mal 1000 Gl. = 3000 fl.

Mehrere verschiedene Auflösungen hier anführen zu wollen, ist kein Bedürfniß mehr, und eben so überflüssig ist es, Bruchverhältnisse in diese Aufgaben bringen zu wollen.

Findet jedoch der Lehrer lezteres für seine Schüler noch nicht entbehrlich, so mag die vorhergehende Reihenfolge von Aufgaben ihm als Leitfaden dienen.

Letzte Aufgabe könnte auch so ausgedrückt werden, daß man die Totaleinlage gar nicht anzugeben nothwendig haben würde. Z. B.

Es fangen zwey eine gemeinschaftliche Unternehmung mit einander an; die Einlage des ersten sowohl als diejenige des zweyten ist unbekannt; der erste gewinnt in einem Jahr 50 fl. und der zweyte in 2 Jahren 300 fl.; es fragt sich, in welchem Verhältniß die Einlagen zu einander stehen?

Um diese Aufgabe wieder zu lösen, verfährt man ganz gleich, wie in der vorhergehenden, und wird finden, daß sich die Einlage des ersten zu derjenigen des zweyten verhält, wie 1 zu 3, oder die des zweyten zu der des ersten, wie 3 zu 1. Würde für die Einlage des einen oder andern eine bestimmte Summe Geld angegeben, so könnte die unbekannte Einlage der andern Person gewiß ohne irgend einen Anstand gefunden werden. Z. B.

Es fangen zwey Personen eine Unternehmung an, die Einlage der ersten soll 100 fl., die der zweyten aber 400 fl. seyn. Die erste gewinnt in dieser Unternehmung 25 fl., und die zweyte 200 fl.; die Zeit aber, welche die erste und zweyte Person diese Gelder in derselben liegen lassen, beträgt 10 Jahr; es fragt sich, wie lange eine jede derselben ihre Einlage in der Handlung gelassen habe.

Auflösung. Die erste Person legt 100 fl., die zweyte aber 400 fl., oder 4mal so viel als die erste ein; wenn sie es aber gleich lang in dieser Unternehmung lassen würden, so hätte die zweyte auch 4mal so viel als die erste gewonnen, oder 4mal 25 fl. gleich 100 fl.; nun aber hat sie nicht 100, sondern 200 fl. gewonnen, also hat sie ihr Geld auch 2mal so lang in derselben gelassen; die erste Person hat einen Theil Zeit, wie die zweyte deren zwey hat, zusammen 3 gleiche Theile, die 10 Jahre ausmachen; auf einen Theil kommt der Drittel von 10, oder $3\frac{1}{3}$, die zweyte Person hat 2 Theile dieser Zeit, oder 2mal $3\frac{1}{3}$ gleich $6\frac{2}{3}$ Jahr.

Wäre die Zeit blos im Allgemeinen ausgedrückt worden, so hätte nur gefragt werden können, in welchem Verhältniß die Zeit der ersten zu derjenigen der zweyten stehe. Der Schüler würde finden, sie verhalte sich, wie 1 zu 2.

Die oben angeführten Abänderungen mit Brüchen dürfen, wenigstens in den Zeitverhältnissen, nicht ganz übergangen werden.

Wie bis jezt immer nur 2 Personen in der Aufgabe vorkamen, so können auch 3, 4 ꝛc. Personen darin zum Vorschein kommen. Weil es aber ein vielseitiges Behalten von verschiedenen Zahlenverhältnissen mit sich führen würde, die als Kopfrechnungsübungen ausgewichen werden müssen, so ist es nicht rathsam, diese Uebung auf mehr als zwey Personen ausdehnen zu wollen, und kann um so mehr übergangen werden, als die Aufgaben beym angewandten Zifferrechnen noch von einer andern Seite dem Schüler vorgeführt werden sollen.

Statt jedesmal die Einlage in einer Summe Geld auszudrücken, kann dieselbe auch in Verhältnissen, die sie zu einander oder zu ihren Gewinnen haben, bestimmt werden. Z. B.

Die Einlage des ersten verhält sich zu der des zweyten wie 1 zu 2, oder 2 zu 3, oder wie 1½ zu 2⅓ u. s. w., sie lassen es eine gleich lange Zeit in der Unternehmung, und ihr sämmtlicher Gewinn sey 1000 fl.; es fragt sich, was einem jeden davon gehöre. Auch kann die nämliche Frage gegeben werden, wenn die erste Person ihre Einlage zwey und die zweyte drey Jahre in der Unternehmung liegen lassen.

So können gleiche Verhältnisse beym Gewinn angegeben werden, ohne jedoch auf eine sehr weite Ausführung derselben zu dringen.

Auch die Mischungsaufgaben sind für das praktische

Leben von Wichtigkeit und deswegen folgen hier noch einige der wesentlichsten derselben.

Zu 10 Maas Wein, wovon die eine Maas 12 Groschen kostet, werden 8 Maas Wasser gethan, und es soll nichts gewonnen, aber auch nichts dadurch verloren werden; es fragt sich, wie theuer dann die Maas zu stehen komme?

Auflösung. Wenn jede von den 10 Maas 12 Groschen kostet, so kosten die 10 Maas 10 mal 12 oder 120 Groschen; werden nun 8 Maas Wasser darunter gemischt, so erhält man in allem 18 Maas, die ebenfalls um 120 Groschen verkauft werden müssen; eine Maas ist von 18 Maas der achtzehnte Theil, also muß sie auch für den 18ten Theil von 120 Groschen oder $6\frac{2}{3}$ Groschen verkauft werden.

Würde man aber bey diesen Aufgaben angeben, es müße so und so viel gewonnen oder auch verloren werden, so dürfte für den ersten Fall zur Summe, die die Mischung kosten würde, der Gewinn hinzu gezählt, im andern Fall aber der Verlust davon abgezogen werden. Mit diesem Zusatz werden die Aufgaben der obigen ganz ähnlich. Ebenso können auch zwey- und dreyerley Arten Weine oder andere Flüssigkeiten gemischt und wieder gleiche Aufgaben gebildet werden. Als Beleg will ich nur noch ein Beyspiel hier anführen.

Man hat zweyerley Weine, 10 Maas, wovon dieselbe 10 Groschen, und 20 Maas, wovon dieselbe 12 Groschen kostet, und unter diese 2 Arten Wein sind 10 Maas Wasser gemischt worden; es fragt sich, wie hoch die Maas zu stehen komme, wenn dabey weder verloren noch gewonnen werden soll?

Auflösung. Die erste Art Wein kostet 10 mal 10 Groschen, die zweyte aber 20 mal 12 Groschen, zusammen 340 Groschen, darunter sind noch 10 Maas Wasser gemischt worden, in allem also 40 Maas, die 340 Groschen kosten, es kommt auf eine Maas der 40te Theil von 340 oder 8½ Groschen.

Die letzten Aufgaben sollen auch noch auf folgende Weise umgekehrt werden.

Man hat zu 10 Maas Wein 3 Maas Wasser gethan, eine Maas dieser Mischung für 4 Groschen verkauft, und dabey weder gewonnen noch verspielt; es fragt sich, wie hoch die Maas von diesem Wein angeschlagen werden müsse.

Antwort. 5⅕ Groschen.

Auflösung. Die ganze Mischung enthält 13 Maas, jede derselben ist für 4 Groschen verkauft worden. 13 Maas also für 13 mal 4 Groschen, oder 52 Groschen; in dieser Mischung befinden sich aber noch 10 Maas Wein, folglich kommt auf eine Maas der zehnte Theil von 52 oder 5⅕ Groschen.

Müßte gewonnen oder verloren werden, so könnten solche Aufgaben ganz gleich, wie die letzten, gelöst werden. Die Ausführung davon wird dem Lehrer überlassen.

Es ist eine Mischung von zweyerley Weinen gemacht worden, deren Maas auf 6 Groschen kommt; in dieser Mischung befinden sich aber 10 Maas, wovon die Maas 7 Groschen kostet; ferner noch 14 Maas, deren Preis unbekannt ist; es fragt sich, wie viel eine Maas des zweyten Weines kosten werde?

Auflösung. Die Mischung hat dieser Angabe zufolge 24 Maas, und jede derselben kommt auf 6 Groschen zu stehen, die ganze Mischung also auf 144 Groschen; in dieser Mischung sind 10 Maas, wovon eine 7 Groschen kostet, und die 10 Maas 10 mal 7 gleich 70 Groschen, 70 Groschen von 144 abgezogen, bleiben noch 74, und für den Rest der Mischung 14 Maas, wenn 14 Maas 74 Groschen kosten, so kostet eine Maas den 14ten Theil von 74 oder 5²/₇ Groschen.

Auch hier kann wieder Verlust und Gewinn und mehrere Arten Weine gleichzeitig angegeben werden.

Man hat zweyerley Weine, Wein, wovon die Maas 10, und Wein, wovon die Maas 4 Groschen kostet; nun soll aus diesen zwey Arten Weine eine Mischung gemacht werden, deren Maas auf 5 Groschen zu stehen kommt; es fragt sich, wie viel von jeder Art dazu genommen werden müsse?

Antwort. 1 Maas guten und 5 Maas schlechten Wein.

Auflösung. Nimmt man 1 Maas von der ersten Art, so geht in der Mischung fünf Groschen verloren, wird aber 1 Maas von der zweyten genommen, so gewinnt man wieder 1 Groschen, und weil nichts gewonnen und nichts verloren gehen soll, so müssen diese fünf Groschen Verlust durch einen Groschen Gewinn wieder aufgehoben werden, 1 ist in 5 aber 5mal enthalten, und so muß man 5 Maas von der zweyten Art nehmen, während man 1 von der ersten Art nimmt. Oder in einem allgemeinen Verhältniß ausgedrückt auf einen Theil vom guten Wein müssen immer 5 Theile vom schlechten, oder von demjenigen Wein genommen werden, der einen geringern Preis hat. Wäre also in lezter Aufgabe angegeben worden, daß eine Mischung gemacht werden müsse, die 100 oder 1000 Maas ɩc. enthalten würde; so müßte zu derselben 1 Theil der ersten und 5 Theile der zweyten Art Wein genommen werden, oder 100 ɩc. sollen in 6 gleiche Theile getheilt werden; $\frac{1}{6}$ davon wird vom guten und $\frac{5}{6}$ vom schlechten genommen werden müssen. Weil diese Aufgaben etwas mehr Schwierigkeiten in ihrer Lösung haben, als die vorhergehenden, so werden einige Aufgaben auch mit Brüchen nicht ganz entbehrlich seyn. Z. B.

Man hat Wein, wovon die Maas $10\frac{2}{3}$ Groschen, und Wein, wovon die Maas aber $4\frac{1}{2}$ Groschen kostet, und mit diesen zwey Arten von Weine möchte man eine Mischung machen, wovon die Maas 5 Groschen kosten würde; es fragt sich, wie viel von jeder Art dazu genommen werden müsse?

Auflösung. An der ersten Art verliert man in der Mischung $5\frac{2}{3}$ Groschen, an der zweyten aber gewinnt man $\frac{1}{2}$ Groschen; diese $5\frac{2}{3}$ Groschen Verlust müssen durch $\frac{1}{2}$ Groschen Gewinn wieder gedeckt werden; $\frac{1}{2}$ ist in $5\frac{2}{3}$ acht und ein drittel Mal enthalten, also muß auf einen Theil von der ersten Art immer $8\frac{1}{3}$ der zweyten genommen werden. Würde man eine Mischung von 100 Maas begehren; so müßte ein Theil von der ersten und $8^1/_3$ Theil von der zweyten Art genommen werden, oder in allem $9^1/_3$ gleiche Theile, in die 100 Maas einzutheilen sind. Würde bey einer dieser Aufgaben angegeben werden, es soll so und so viel gewonnen oder verloren werden, so müßte für den Verlust so viel vom guten Wein genommen werden, bis man denselben bezweckt hätte, und eben so viel müßte für den Gewinn vom schlechten Wein in die Mischung gethan werden, bis der Forderung entsprochen wäre; z. B.

Man hat Wein, wovon die Maas 10 Groschen, und Wein, wovon die Maas 4 Groschen kostet; nun möchte man mit diesen zwey Arten eine Mischung machen, wovon die Maas auf 6 Groschen zu stehen käme, 100 Groschen gewinnen und eine Mischung von 1000 Maas machen; es fragt sich, wie viel von jeder Art genommen werden müsse?

Auflösung. Um einen Gewinn von 100 Groschen zu erhalten, muß man vom geringern Wein nehmen; die Maas kostet 4 Groschen, und in der Mischung wird dieselbe für 6 Groschen verkauft, also entsteht ein Gewinn von 2 Groschen; 2 sind in 100 Groschen 50 mal enthalten; es müssen folglich 50 Maas zum voraus von der geringern Sorte genommen werden, und nun darf von der 2ten Art Wein auf die gewöhnliche Weise eine Mischung von 950 Maas gemacht werden. Zu dem geringern Wein, der nun gefunden werden wird, müssen dann noch 50 Maas gezählt werden, die man vor allem ausnehmen muß, um den Gewinn zu erhalten.

Sollte in einer solchen Mischung verloren werden, so kann ganz auf die gleiche Weise vom guten genommen werden.

Würden diese Beyspiele nicht hinreichen, dem Schüler ähnliche Aufgaben klar und geläufig zu machen, so dürften hier noch einige Beyspiele mit Brüchen gegeben werden. Auf keinen Fall aber soll zu verwickelten Zahlenverhältnissen geschritten werden.

Obige Aufgaben können noch auf folgende Weise umgekehrt werden.

200 Maas, wovon eine 4 Groschen kostet, ist eine Mischung von zweyerley Wein, an der nichts gewonnen und nichts verloren worden ist; zu dieser Mischung wurde aber Wein genommen, von 10 und von 2 Groschen die Maas; es fragt sich, wie viel von jeder Art dabey sey?

Auflösung. Die Mischung ist 200 Maas und jede Maas ist auf 4 Groschen gekommen; angenommen, sie wäre ganz aus der geringern Sorte gemacht worden, so würden 200 mal 2 Groschen oder 400 Groschen gewonnen worden seyn; nun ist aber angegeben, daß weder verloren noch gewonnen wurde; folglich müssen diese 400 Groschen wieder durch den Verlust des guten Weins gehoben seyn. Nimmt man eine Maas vom guten, statt vom schlechten Wein, so verliert man 8 Groschen, denn er kostet 10, indem der schlechte nur 2 kostet, diese 8 Groschen sind in 400 fünfzigmal enthalten, also 50 Maas vom guten, und der Rest bis zu 200 Maas oder 150 Maas wird schlechter seyn.

Daß dann und wann zur Abwechselung auch die

Probe kann gemacht werden, versteht sich von selbst. Wollte man dieses auf obige Aufgabe anwenden, so dürfte nur untersucht werden, wie theuer die Maas zu stehen kommt, wenn man 50 Maas zu 10 Groschen und 150 zu 2 Groschen mit einander mischt. Ist obige Aufgabe richtig gerechnet worden, so soll die Maas gemischten Weins auf 4 Groschen zu stehen kommen.

So können auch in diesen Aufgaben Gewinn und Verlust angegeben werden, wie z. B., es wären 100 Groschen an obiger Mischung gewonnen oder verloren gegangen, und soll bestimmt werden, wie viel von der einen oder von der andern Art sich in der Mischung befinde.

Ich habe in diesen Aufgaben immer Flüssigkeiten angegeben, die durch die Maas bestimmt worden sind; sie können aber auch andern Größenbestimmungen unterworfen werden. Ein Paar Beyspiele hierüber mögen hinreichen.

Es sind zweyerley Metalle in einander geschmolzen worden; nun wird angenommen, das erste sey 5mal so schwer als das zweyte, und die Schmelzung habe 3 mal die Schwere des zweyten Metalls erhalten; es fragt sich, in welchem Verhältniß das erste Metall zum zweyten stehe?

Auflösung. Nimmt man einen Theil vom ersten Metall, so verliert es in der Schmelzung 3 Theile; wird aber ein Theil vom zweyten genommen, so gewinnt man Schwere halber in dieser Schmelzung einen Theil, denn er wiegt nur einen Theil, und durch die Schmelzung sollte er zwey erhalten; ein Theil ist in 3 Theilen, die durch

das

das schwere Metall verloren gehen, 3 mal enthalten, also muß ein Theil vom ersten Metall auf 3 vom zweyten genommen werden.

Probe: ein Theil vom ersten Metall hat 5 mal die Schwere des zweyten, und 3 Theile des zweyten haben 3 mal eine solche Schwere, in allem 8 mal die Schwere des zweyten; die Schmelzung erhält dadurch 3 Theile und einen, oder 4 Theile, die zusammen 8 Schweren des zweyten Metalls ausmachen; es kommt auf ein Theil 2 mal eine solche Schwere, oder 2 mal die Schwere des zweyten Metalls, wie man es begehrt hat.

Weil die Metalle auch durch Kubikzoll, Kubiklinien rc. ausgedrückt werden, so können ähnliche Aufgaben noch in diesem Maas angewandt, gegeben werden. Auf keinen Fall sollen aber diese Aufgaben sehr weit ausgedehnt werden.

Diese Anwendungsaufgaben können noch auf die mannigfaltigste Art mit einander verbunden und dadurch neue Aufgaben gebildet werden. In diese Verbindung trete ich aber gegenwärtig gar nicht ein, sondern werde zu dem angewandten Zifferrechnen vorschreiten, und bey dieser Darlegung erörtern und vervollständigen, was noch mangelt und vorzüglich dem Zifferrechnen angehört.

Die Verbindungen verwickelter Zahlenverhältnisse gehören ihrer Natur nach auch eher zum angewandten Ziffer- als zum angewandten Kopfrechnen; daher kann nicht entgehen, warum eine sehr große Anzahl höherer Zahlverhältnisse hieher gehören. Aber auch bey dem angewandten Zifferrechnen werde ich mich kurz fassen, und nur das

Wichtigste und Wesentlichste dessen, was diesfalls in der Schule eingeübt werden muß, berühren.

Mit dem angewandten Kopfrechnen soll, ehe man mit dem angewandten Zifferrechnen den Anfang macht, wenigstens sehr merklich vorgeschritten werden, und man darf nie aus den Augen lassen, daß die Uebungen des angewandten Kopfrechnens denjenigen des Zifferrechnens auf jeden Fall und unter allen Umständen immer vorangehen müssen, wenn der vorhabende Endzweck ganz erreicht werden soll. Alle Grundsätze, die für den Lehrer gleich im Anfang des Kopfrechnens aufgestellt worden sind, finden aber auch hier ihre volle Anwendung, und werden nur deswegen nicht wiederholt, weil ich voraus setze, daß der Lehrer sich dieselbe hier leicht vergegenwärtigen könne. Auch sind sie im innern Wesen den früher aufgestellten so ähnlich, daß ich es als eine unnütze Ausdehnung ansehen würde, wenn ich gegenwärtig über diesen Punkt noch umständlicher seyn wollte. Je mehr der Schüler vorschreitet, desto mehr stärkt sich die mechanische Fertigkeit in Verbindung mit der Gedächtnißkraft, mit höhern Zahlen leicht rechnen zu können, in ihm, und muß dem gemäß auf dieser Stufe auch erweitert werden; doch darf man dieses niemals so weit ausführen, daß die mechanischen Fertigkeiten auf Kosten der Geisteskraft befördert werden. Auch wird folgende Bemerkung beynahe überflüssig: Ist der Schüler gehörig geführt worden, so hat er ohne Anstand jede der eben aufgestellten Aufgaben mit der höchsten Leichtigkeit gelööt. Sollte er auf unübersteigliche Schwierigkeiten stoßen; so darf angenommen werden, er sey hiefür nicht gehörig vorbereitet worden, oder man sey zu schnell in den Reihenfolgen vorgeschritten. In einem solchen Fall müßte auf die gleiche Weise gut gemacht werden, was ich im Anfang sehr umständlich erörtert habe. Doch ich gehe zu den positiven diesfälligen Uebungen. Bey'm angewandten Zifferrechnen wird auf folgende Weise verfahren werden.

Statt daß bey'm Kopfrechnen immer nur Zahlverhältnisse angegeben worden sind, die mit Leichtigkeit durch das Gedächtniß fest gehalten werden konnten; so müssen bey dem angewandten Zifferrechnen hingegen solche in die Aufgaben gebracht werden, die durch das Gedächtniß nicht mehr so leicht festgehalten werden dürften.

Die Brüche und Bruchverhältnisse sollen hiebey in keinem Fall ausgewichen werden. Auch wird auf dieser Stufe jedesmal die Regel, nach der die eine oder andere Aufgabe gelöst werden kann, angegeben werden.

Ich befolge auch hier wieder den Gang, den ich bey'm angewandten Kopfrechnen aufstellte, nehme aber auf das Rücksicht, was dem Zifferrechnen hier eigenthümlich zukommt, und werde an Ort und Stelle die einschlagende Modifikation anzubringen wissen.

Wenn $3\frac{3}{4}$ Zentner irgend einer Waare $348\frac{7}{8}$ Gulden kosten, wie viel werden $74\frac{9}{10}$ Zentner kosten?

Wir wissen schon aus den Uebungen des Kopfrechnens, daß diese Aufgabe wenigstens auf sieben verschiedene Arten gelöst werden kann. Auf keinen Fall sollen hier alle diese Abänderungen erschöpft werden, sondern man beschränkt sich jedesmal auf ein paar Auflösungsarten, die der Schüler als die vorzüglichern und geeignetesten für ihn erachten mag. Bevor man ihn aber zu andern Aufgaben schreiten läßt, wird auf jeden Fall nothwendig, daß er mit der Regel, nach welcher dieselben gemacht werden können und gewöhnlich im praktischen Leben gemacht werden, vertraut und bekannt werde. Hiebey hat der Schüler jedesmal zwey wesentlich verschiedene Regeln zu berücksichtigen. Die eine davon muß sich auf eine der verschiedenen Auflösungsarten, die er als vorzüglich ansieht, gründen: die andere hingegen soll sich nach dem, was im praktischen Leben angenommen worden ist, richten, und muß vom Schüler mit eben der Klarheit behandelt werden, wie wenn es eine frey und selbstständig gefundene Regel wäre.

Ohne seiner Eigenthümlichkeit zu schaden, darf sich der, bis zu diesem Grad ausgebildete Schüler auch nach dem richten, was in den bürgerlichen Rechnungs-Verhältnissen einmal angenommen ist; versteht sich, daß er auch dieses in sich zur höchsten Klarheit, wie wenn es ein geistig selbst erzeugtes Produkt wäre, erheben muß.

Ich kehre zur Auflösung obiger Aufgabe zurück. —

Der Schüler wird dieselbe zuerst unter einer der früheren bey'm Kopfrechnen aufgestellten Formen lösen. Z. B. Wenn $3\,{}^3/_4$ Zentner irgend einer Waar $348\,{}^7/_8$ fl. kosten, so werden die $74\,{}^9/_{10}$ Zentner so oft diese Summe kosten, als $3\,{}^3/_4$ in derselben enthalten sind; für diesen Endzweck werden ${}^1/_4$, ${}^9/_{10}$ und $3\,{}^3/_4$ in 20tel oder 40tel u. s. w. verwandelt werden müssen, hernach wird auf die gewöhnliche Weise dividirt, und die gefundene Zahl aber noch mit 384 $^7/_8$ multiplizirt.

Als allgemeine Regel kann bey dieser und ähnlichen Aufgaben angenommen werden, man könne nur mit der Anzahl Pfund, Zentner, Maß u. s. w. deren Preis bekannt ist, in die Pfund, Zentner, Maß u. s. w. deren Preis aber unbekannt ist, dividiren und das gefundene noch mit den bekannten Preisen dieser Pfunde, Zentner, Maß u. s. w. multipliziren, deren letztes Produkt hier die zu suchende Summe Gulden geben wird. Die Gründe hievon finden sich in der vorhergehenden Auflösung so ausführlich angegeben, daß der Schüler sie bey Angebung dieser Regel nicht mehr anzuführen nöthig haben wird.

Nicht nur die letzte Auflösungsweise, und die aus ihr hervorgehende Regel kann zu diesem Endzweck dienen, sondern jede Auflösung, die im Anfang des angewandten Kopfrechnens aufgestellt worden ist, wird hiefür dienlich seyn. Der eine Schüler wird zur Erreichung seines Endzwecks diese, der andere aber wieder andere Auflösungen und Regeln gebrauchen.

An dieses kann angeknüpft und dem Schüler gesagt werden, daß im gewöhnlichen, praktischen Leben weder die eine noch andere dieser Regeln eine Anwendung erhalten habe, hingegen folgendes als allgemein üblich anzusehen sey. Nämlich, es werden die Anzahl der Zentner, deren Werth unbekannt ist, mit dem Werth der bekannten Zentner multiplizirt und hernach wird das Produkt mit den Zentnern 2c., deren Werth bekannt ist, noch dividirt, und der Quotient ist die Summe Gulden, die sie kosten. Die

Gründe dieser Regel sind in dem, was bey'm Kopfrechnen sehr ausführlich erörtert worden ist, nachzusehen. Auch wird sie gewiß jeder Lehrer so wie der geübtere Schüler anzugeben im Stande seyn, ohne daß er sich diesfalls bey den ersten aufgestellten Uebungen umzusehen nothwendig haben wird.

Eine der letzten Aufgabe ähnliche wird umgekehrt. Für 100 $^{4}/_{5}$ bekommt man Zentner 4 $^{2}/_{3}$; es fragt sich, wie viel Zentner man für 3044 $^{9}/_{4}$ fl. erhalten wird? Um diese Aufgabe zu lösen, verfährt man wie bey der obigen und läßt zuerst durch reine Vernunftschlüsse auf beliebige Weise die unbekannte Größe suchen und fragt dann am Ende den Schüler, welches wird die allgemeine übliche Regel seyn, wenn auch hier die letzte Angezeigte als angenommen betrachtet werden muß.

Es wird nicht fehlen, der Schüler wird ohne weiteren Anstand folgende Regel angeben: die Summe Gulden, deren Anzahl Zentner unbekannt ist, wird mit der bekannten Anzahl Zentner multiplizirt und das Produkt mit der Summe Gulden, deren Zentner bekannt ist, endlich noch dividirt; denn durch die Multiplikation würde man die Anzahl der Zentner erhalten, die man sucht, wenn man für einen Gulden gerade diese Anzahl Zentner bekommen würde. Nun aber erhält man nicht für einen Gulden, sondern für 100 $^{4}/_{5}$ dieselbe Anzahl Zentner; also muß man auch den 100 $^{4}/_{5}$ Theil noch davon nehmen, oder mit 100 $^{4}/_{5}$ dividiren. —

Auch kann diese Aufgabe als die Probe der vorhergehenden angesehen und behandelt werden. Gebe ich, wie es in Zukunft öfters geschehen wird, auch nur die Regel an, so versteht es sich von selbst, daß die mechanische Ausführung und Einübung bey jedem Schüler in einem höhern oder geringern Grad nothwendig wird und muß jedesmal nach dem Bedürfniß desselben gerichtet werden. Dieses zu bestimmen, darf dem Lehrer, der in den Geist und in das Leben der gegenwärtigen Darlegung eindringt, überlassen werden. Ich bemerke über diesen Punkt nur noch so viel: mehr als etwa eine oder zwei Aufgaben sollten nie von einer Art gegeben werden; wird diesfalls ein höherer Grad mechanischer Fertigkeiten gefordert, so müssen allerdings von einer Art Aufgaben mehrere Beyspiele gegeben werden; damit der Schüler aber nie Gefahr laufe, sich dadurch nur mechanische Fertigkeiten, auf Kosten der Geistesentwicklung, eigen zu machen, wird man wohl thun, auch in diesem Fall ihn noch öfters anzuhalten, Auflösungen über dieselbe zu machen. Als eine kleine Abänderung von Aufgaben zur Erreichung dieses Endzwecks mögen noch folgende Aufgaben hier stehen. Wenn 2 Zentner 3 Pfund, und $3\,{}^1/_4$ Loth 3 fl. $48\,{}^7/_8$ kr. kosten; was werden 85 Zentner 46 Pf. $3\,{}^1/_5$ Loth kosten? Oder, wenn man für 30 fl. 40 kr. $3\,{}^1/_4$ Heller, 4 Zentner 49 Pf. $3\,{}^1/_6$ Loth erhält, wie viel wird man für 1000 fl. 4 kr. $3\,{}^1/_{10}$ hl. bekommen?

Die erste sowohl als die zweyte dieser Aufgaben kann durch reingeistige Schlüsse, wie die frühern, gelöst, und am Ende aber die Regel von jeder derselben noch angegeben werden. Als Regel für das praktische Leben dient auch hier die eben aufgestellte. Weil aber diese Aufgaben als Brüche von verschiedener Art in's Auge gefaßt werden können, so wird man wohl thun, alles zuerst unter einerley Größen oder unter einerley Benennungen zu bringen. Z. E. Bey der zweyten Aufgabe werden die 30 fl. 40 kr. $3\,{}^{1}/_{4}$ Heller zuerst in 20tels Heller verwandelt, und eben so die 1000 fl. 4 kr. $3\,{}^{1}/_{10}$ hl., weil die zwey Brüche der Heller die 4tel und 10tel sich in den 20steln vereinigen; hernach wird mit der ersten Anzahl in die zweyte dividirt; und mit 4 Zentnern 49 Pf. $3\,{}^{1}/_{6}$ Loth der Quotient, dann noch multiplizirt. Um mit dieser Zahl zu multipliziren, wird auf die gleiche Weise wieder alles zu 6tels Loth verwandelt werden müssen, das gefundene Produkt wird dann 6tels Loth geben, und kann daher durch die Division mit 6 zu Loth, die Loth durch die nämliche Operation von 32 zu Pfund, und endlich durch die Division von 100, die Pfund in Zentner verwandelt werden. Der jedesmalige Rest gibt ein 6tels Pfund und Zentner.

Auf gleiche Weise wird verfahren, wenn ähnliche Aufgaben durch die jetzt dem Schüler bekannte Regel gelöst worden sind.

Sind die verschiedenen Ganze einmal unter einerley Größen gebracht, so verfährt man ganz gleich wie in letzterer Auflösung. Will man den Schüler auch mit dem angenommenen Kunstausdruck dieser Rechnungs-Aufgaben als Dreysatz-Regel bekannt und vertraut machen, so wird dieses ohne irgend einen Nachtheil geschehen können. Auch ist es für ihn sehr bildend, wenn er aufgefordert wird, alle Aufgaben, die er jetzt kennt und welche unter diese Regel gebracht werden können, anzugeben. Ein karakterisirendes Kennzeichen dieser Aufgaben ist, daß alle Auf=

gaben, welche unter die Dreysatzregel gehören, auch unter das geometrische Verhältniß gebracht werden können. Obigen Aufgaben noch andere Bestimmungen zu geben, wie Gewinn, Verlust, größeres oder kleineres Maß, auch verschiedene Münzsorten und so weiters, gehören noch auf diese Stufe. Einige wenige Beyspiele hierüber mögen hinreichen. Wenn ein Zentner irgend einer Waare 3 fl. 48 kr. 3 $^1/_4$ hl. kostet, wie viel werden 34 Zentner 39 Pf. 4 $^1/_2$ Loth kosten; wenn die zweyte Waare aber um die Hälfte mehr oder um die Hälfte weniger als die 1te kosten soll? Zur Abwechslung kann auch gefragt werden, wie theuer man das Pfund oder das Loth verkaufen müsse, wenn man nichts, oder wenn man an dem Zentner so und so viel gewinnen, oder verlieren wolle? Desgleichen, wenn diese Bestimmung auf das Pfund, auf die Loth u. s. w. ausgedehnt wird.

Wie theuer wird man das Pfund geben müssen, wenn das Gewicht schwerer oder leichter, und zwar um so viel Loth oder um diesen oder jenen Theil eines Pfundes oder eines Zentners n. s. w. seyn wird. Auch kann bey verändertem Gewicht mehr Gewinn oder Verlust in die Aufgabe gebracht werden. Wird der Schüler diese und ähnliche Aufgaben durch geistige Schlüsse mit Leichtigkeit lösen, so kann ihn der Lehrer auch die eine oder andere dieser Aufgaben durch die oben aufgestellten Regeln suchen und berechnen lassen. Das was durch irgend eine solche Bestimmung noch hinzu gekommen ist, muß in einem solchen Fall nur noch als ein Beysatz behandelt werden, und durch eine der vier Rechnungsarten, als die Addition, Subtrac=

tion, Multiplication und Division ausgedrückt werden. Die Regel jedesmal aufstellen zu wollen, ist aber bey so einzelnen Aufgaben nicht mehr nothwendig; besonders, wenn das Wesen der im Anfang aufgestellten Regeln dem Schüler auf eine ganz geläufige Weise eigen gemacht worden seyn wird. Die Eintheilung des Maßes, welches durch Klafter, Schuh, Zoll, Kubikklafter, Kubikschuh, Elle, Stab, u. s. w. ausgedrückt, und worüber das Weitere in dem Maßverhältnisse nachzusuchen ist, darf hier nicht ganz übergangen werden. Einige Beyspiele werden dieses außer Zweifel setzen. Wenn ein Stück Land, das 10 Klafter, 3 Schuh und 2 Zoll breit, und 40 Klafter, 3 Schuh lang ist, 40 fl. kostet, wie viel wird ein Stück vom gleichen Feld, welches 24 Klafter breit, 36 Klafter 4 Schuh und 2 Zoll lang ist, kosten?

Um diese Aufgabe zu lösen, verwandelt man die Länge und die Breite eines jeden Stückes. Ich begnüge mich, diesfalls nur folgenden Wink für den Lehrer hier zu geben.

Statt alles in Zoll zu verwandeln, hätte man die Zolle und Schuhe der Länge und Breite von jedem Stück Feld in einem Bruch angeben und verwandeln können. Diese Auflösungsweise wäre aber weitläufiger und schwieriger gewesen, als die so eben aufgeführte es ist. Als Abwechslung darf auch diese Auflösungsweise nicht verschmäht werden. Wenn 20 Stück Tuch, die zusammen ein Stück von 364 $^7/_8$ Stab lang und 1 $^1/_4$ Stab breit geben wird, 3484 $^7/_8$ fl. kosten, wie theuer werden 496 $^4/_5$ Stab, die aber 1 $^1/_2$ Stab breit sind zu stehen kommen? Es wird hiebey angenommen, daß dieses Tuch in allen

Stücken gleiche Eigenschaften habe und der Preis nur nach seinem Inhalt eine Veränderung erleide.

Hier wird wieder, wie in der vorhergehenden Aufgabe, zuerst der Inhalt von beyden Arten Tuch gesucht werden müssen; man multiplizirt zu diesem Endzweck die Länge mit der Breite sowohl des einen als auch des andern Stücks und dividirt wieder mit dem Inhalt, dessen Werth bekannt ist, in den Inhalt derjenigen Stäbe Tuch, deren Werth gesucht wird, dann multiplizirt man den Quotient mit dem, was das erste Stück Tuch kostet; denn aus der Verbindung der Zahl mit der Form wissen wir, daß um irgend eine Rechtecksfläche zu finden immer die Länge mit der Breite multiplizirt werden muß, und um zu untersuchen, wie oft das eine Stück so groß als das andere seyn müsse, ist nothwendig, daß man das eine durch das andere noch dividire; so oft das Stück, dessen Werth gesucht wird, so groß ist als dasjenige, dessen Werth wir kennen, so oft werden sie auch die angegebene Summe kosten.

Wenn ein Stock Heu, der 1 Klafter, 3 Schuh und zwey Zoll breit, 2 Klafter und 3 Schuh lang, und ein Klafter und 5 Schuh hoch ist, 200 fl. 40 kr. kostet; wie viel wird ein Stock, der 2 Klafter breit, 3 lang und 2 Klafter und 5 Schuh hoch ist, kosten? Zuerst muß wieder der körperliche Inhalt von jedem Stück Heu auf die gewöhnliche Weise gesucht werden, nämlich man multiplizirt die Breite mit der Länge, und das gefundene Produkt noch mit der Höhe von jedem Stock, und fahrt wie oben fort, den einen Stock in den andern zu dividiren, und den Quotienten mit dem, was der eine kostet, zu multiplizieren. Aehnliche Aufgaben können auch über Gräben, Mauern, überhaupt was körperlich bestimmt werden kann, gemacht und gegeben werden. —

Eine größere Anzahl Aufgaben hierüber den Schüler ausführen lassen zu wollen, wird auf keinen Fall nothwendig, denn hiebey giebt es nur sehr viel zu rechnen und mechanische Fertigkeiten sich eigen zu machen; und wenn dieses ausgedehnt würde, so könnte das, was nur untergeordnet behandelt werden muß, leicht ein Uebergewicht erhalten. Diesen Aufgaben noch andere Eigenschaften beyzulegen, als Gewinn oder Verlust, allenfalls verschiedene Größen in ihrem Maße u. s. w. kann, wie es bey den Zentnern, Pfunden u. s. w. geschehen ist, auch statt finden. Es soll aber in keinem Fall sehr weit ausgedehnt werden.

So wie jedesmal der Preis als unbekannt zu suchen gegeben würde, so kann auch der Inhalt, oder die Länge oder die Breite, oder die Höhe, in einer dieser Aufgaben zu suchen gegeben werden. Z. B. Man hat 348 $^1/_2$ Stab Tuch, welches 1 $^1/_4$ Stab breit ist, für 2648 fl. 46 kr. gekauft, und 444 $^1/_3$ Stab vom nämlichen Tuch aber für 3000 fl.; es fragt sich wie breit es sey? Um diese Aufgabe zu lösen, wird der Inhalt der ersten Tücher durch die Multiplication der Länge mit der Breite bestimmt; hernach mit dem, was das erste Stück kostet, in die Summe des zweyten dividirt; und der Quotient mit dem Inhalt des ersten Stücks dann noch multiplizirt; denn so oft das zweyte Stück so viel kostet als das erste, muß es auch so groß seyn, u. s. w.; hernach wird mit der Länge des zweyten Stücks in seinen gefundenen Inhalt dividirt werden, und der Quotient gibt seine Breite.

Diese und ähnliche Aufgaben sind weder für das bürgerliche Leben noch in irgend einem andern Verhältniß wichtig. Als Stärkung und Uebung der Geisteskraft werden aber ähnliche Aufgaben nicht ohne Bedeutung und mögen von dieser Seite hier noch eine Stelle finden. Aber um diesen Endzweck vollkommen zu erreichen, ist es nicht nothwendig, daß dieses sehr weitläufig ausgeführt werde. Wird der Schüler die Regel, so wie die Gründe, auf denen dieselbe ruht, genau kennen, so ist der Hauptzweck, den man durch dieselbe zu erreichen hat, auch wirklich erreicht.

Die obige Aufgabe mag als Norm zu andern Fragen, die diesfalls gebildet werden, dienen.

Bey dem körperlichen Raume müssen aber immer zwey, entweder die Breite und die Länge oder die Breite und Höhe, oder die Höhe und Länge als bekannt gegeben werden. Jedesmal kann diesem zufolge nur eine Ausdehnung, entweder die der Länge, oder die der Breite oder endlich die der Höhe als unbekannt gegeben werden. Wendet man dieses auf Gebäude, auf Gräben u. s. w. an, so können sehr praktische Aufgaben mit großer Leichtigkeit gebildet werden.

Auch die Verwandlung der verschiedenen Münzsorten in andere gehört ganz hieher, und ist den erst aufgestellten Aufgaben, so wohl in ihren Regeln als auch in ihren Gründen so ähnlich, daß ich die weitere Ausführung davon als ganz überflüssig ansehe und nur auf das aufmerksam mache, was ich im angewandten Kopf-Rechnen diesfalls aufgestellt und es hier zur Uebung anempfehle. Ich schreite in dem, was ich gegenwärtig darzulegen habe, weiter.

Wenn 102 Arbeiter $24\,{}^{7}/_{8}$ Tag, bey täglich $10\,{}^{1}/_{2}$ Stund Arbeit, eine gewisse Arbeit verfertigen, in wie viel Tagen werden 75 Arbeiter, die täglich über $12\,{}^{3}/_{4}$ Stunden arbeiten, an einer eben so großen Arbeit haben?

Die ganze Reihenfolge von Aufgaben, die diesfalls beym Kopfrechnen aufgestellt worden sind, können hier nur in höhern Zahlen, und mit Aufstellung der Regeln noch einmal wiederholt werden; doch sollen vorzüglich diejenigen heraus gehoben werden, die in dem bürgerlichen Leben eine Anwendung haben, wie es bey obiger Aufgabe und bey den kommenden der Fall seyn wird. Regel derselben ist: Es werden die Arbeiter, deren Zeit bekannt ist, mit ihren Tagen und Stunden multiplizirt, und hernach das Produkt mit den Arbeitern, deren Zeit gesucht wird, dividirt werden, nachdem zuvor ihre Arbeiter mit ihren Stunden, die sie täglich arbeiten, multiplizirt worden sind; der Quotient wird die Zahl der Tage, die hiefür nothwendig sind, werden.

So wie beym Kopfrechnen mehrere Auflösungen statt gefunden haben, so sind auch hier mehrere Regeln, die sich auf die jedesmalige Auflösung gründen, möglich; dieses aber auf gegenwärtiger Stuffe erschöpfen zu wollen, wird auf keinen Fall mehr nothwendig werden. Weiß der Schüler mit Leichtigkeit irgend eine Regel aufzustellen, so darf man für erreicht ansehen, was jetzt erzielt werden soll.

Die Gründe der obigen Regeln sind beym Kopfrechnen weitläufig und umständlich angegeben worden, und seine Kraft soll als so weit entwickelt in's Auge gefaßt werden, daß man ohne allen Anstand annehmen darf, jeder Schüler sey im Stande, diese Gründe auf der Stelle anzugeben.

Wenn 340 Arbeiter in 526 Tagen, bey täglich 14½ Stunden Arbeit, ein gewisses Werk vollenden, wie viele Stunden müssen 400 Arbeiter täglich arbeiten, wenn ein ähnliches Werk in 588⅘ Tagen vollendet werden soll? Bey den ersten Arbeiten werden die Arbeiter mit ihren Tagen und das Produkt mit ihren Stunden multiplicirt; hernach werden die zweyten Arbeiter mit ihren Tagen multiplicirt und mit diesem Produkt in das erste dividirt; der Quotient wird aber die Anzahl der Stunden geben, die jeder Arbeiter täglich zu arbeiten haben wird; dann durch die Multiplication der ersten Arbeiter mit ihren Tagen und Stunden erhält man die Stundenzahl der bekannten Arbeit; multiplicirt man aber die zweyten Arbeiter mit ihren Tagen, so giebt dieses die Tagwerke, die für die zweyte Arbeit oder für diejenige, deren Stundwerk unbekannt ist, und durch die Division des zweyten Produkts durch das erste erhält man die Anzahl der Stunden, die der Arbeiter täglich zu arbeiten hat.

So können alle Aufgaben, die beym Kopfrechnen aufgestellt worden sind, gelöst und ihre Regeln angegeben werden.

Daß auch beym Zifferrechnen der Arbeit, den Arbeitern u. s. w. noch andere Bestimmungen beygelegt werden dürfen, geht schon aus dem aufgestellten Gang hervor und würde auch ohne weitere Ausführung von jedem Lehrer selber ergänzt werden können. Zur Verdeutlichung werde ich einige dieser Bestimmungen in Kürze angeben.

In obigen Aufgaben kann man statt einer gleich großen Arbeit auch eine ungleiche angeben, z. B. eine solche, wovon die eine $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ u. s. w., oder doppelt, dreyfach u. s. w., oder $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ u. s. w. so groß ist als diese Andern.

Um dieses zu berechnen, kann man die obigen Auflösungen und Regeln anwenden, mit dem Beysatz, daß die jedesmal gefundenen Quotienten mit dem Verhältniß der Größen der verschiedenen Arbeiten noch multiplicirt werden müssen. Sind es aber Arbeiten, die durch Ausmessung der Körper bestimmt werden, so muß zuerst der Inhalt auf die früher angegebene Weise berechnet werden und hernach untersucht, wie oft die eine Arbeit so groß sey als die andere.

Die weitere Auflösung ist in dem so eben Aufgestellten nachzusehen. Aus diesem geht als allgemeine Regel aller dieser Aufgaben hervor:

Daß in jeder derselben die Arbeiter mit allen ihnen angehörigen Tagen, Stunden, Minuten u. s. w. unter einander multiplicirt werden müssen, und mit demjenigen Produkt, bey dessen Arbeit sich irgend ein Verhältniß, welches durch die Zahl ausgedrückt werden kann, unbekannt ist, muß das andere Produkt dividirt werden, und der Quotient drückt dann immer das unbekannte Verhältniß aus und zwar als Arbeiter, oder als Tage, oder

Stun=

Stunden u. s. w. Sind es aber verschiedene Arbeiten, so wird der Quotient jedesmal noch mit dem Verhältniß, welches diese Arbeiten zu einander haben, multiplicirt, eben so verhält es sich, wenn die Arbeiter nicht gleich viel täglich arbeiten sollten. Wie z. B. die ersten Arbeiter sollen nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, 2, 3, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ mal so viel arbeiten als die zweyten. Ueberhaupt können beym Zifferrechnen alle beliebigen Zahlbestimmungen gegeben werden, und der Schüler soll, in so fern er mit der nöthigen Vorbereitung auf diese Stufe geführt wird, auch gar keinen Anstand mehr finden, dieselben zu lösen, in welcher Form und in welcher Gestalt sie ihm immer dargelegt und gegeben werden mögen.

Wichtiger für das Leben sind aber noch folgende Aufgaben und werden mit den obigen auf die gleiche Weise gelöst. Wenn man für $100\frac{1}{2}$ Zentner auf $20\frac{3}{4}$ Stunden weit $104\frac{7}{8}$ fl. bezahlt, wie viel wird man für $604\frac{9}{10}$ Zentner auf $80\frac{1}{4}$ Stunden weit bezahlen müssen?

Die Regel hievon wäre, man multiplicirt die Zentner, deren Werth bekannt ist, mit ihrer Zeit, und dividirt mit diesem Produkt in die Summe, die man von denselben bezahlen muß, multiplicirt hernach mit dem Quotienten das Produkt, welches entsteht, wenn die Zentner, deren Werth unbekannt, mit ihrer Zeit multiplicirt worden ist; denn wenn man die ersten Zentner mit ihren Stunden multiplicirt, so erhält man die Anzahl der Zentner, die eine Stunde weit für die angegebene Summe Gelds geführt wird; dividirt man aber mit dieser Anzahl Zentner in ihren Werth, so erhält man den Werth von einem Zentner auf eine Stunde; wird dann noch die zweyte Anzahl Zentner mit ihren Stunden multiplicirt, so erhält man wieder das Obige, nämlich die Anzahl Zentner, die eine Stunde weit für die gleiche Summe Gelds geführt wird, und so oft man 1 Zentner hat, so oft muß der gefundene Quotient oder das, was derselbe ausdrückt, bezahlt werden; folglich muß das letzte Produkt noch mit dem gefundenen Quotienten multiplicirt werden.

Will man mehrere Auflösungen über eine und dieselbe Aufgabe machen, so kann in dem, was über das Kopfrechnen aufgestellt worden ist, nachgesehen werden. Auch hat jede Auflösung wieder ihre eigene Regel, und es können folglich auch hier, wie überall, so viele Regeln angegeben werden, als Auflösungsarten statt finden.

Es werden für 400 $\frac{9}{10}$ Zentner auf 20 $\frac{3}{4}$ Stunden weit 284 $\frac{1}{8}$ fl. bezahlt; wie weit kann man 1000 $\frac{1}{2}$ Zentner für 600 $\frac{1}{4}$ fl. führen?

Man multiplicirt die erste Anzahl Zentner, oder die Zentner, bey denen sich kein unbekanntes Verhältniß findet, mit ihren Stunden, und dividirt mit diesem Produkt in die Summe, welche dafür bezahlt wird; dieser Quotient wird mit der Anzahl der Zentner, deren Entfernung unbekannt ist, multiplicirt und mit dem Produkt in den Werth, der dafür angegeben ist, dividirt, welches die Anzahl Stunden, die sie geführt werden, giebt.

Die Gründe dieser Regel sind der obigen ganz ähnlich; ich darf also dießfalls nur dahin verweisen.

Wenn man 80 $\frac{1}{4}$ Zentner, 19 $\frac{1}{2}$ Stunden weit für

$100\frac{1}{5}$ fl. führt; wie viele Zentner wird man $200\frac{1}{2}$ Stunden weit für $604\frac{1}{8}$ fl. führen?

Der Zentner und die Zeit, deren Werth bekannt ist, werden mit einander multiplicirt und in ihren Werth dividirt; der Quotient mit der 2ten Stundenzahl dann multiplicirt, und die Summe Geldes, deren Zentner unbekannt sind, werden durch dieses Produkt endlich dividirt, wodurch man die Anzahl Zentner erhält. Auch diese Gründe sind denjenigen der ersten Auflösung ganz gleich. Hier können verschiedene Preise, oder andere zu berechnende Verhältnisse, wie in den vorhergehenden Aufgaben, angegeben werden. Z. E. Von dem 2ten Zentner bezahlt man mehr oder weniger als von dem 1sten, und zwar $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, 2, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$ mal so viel als von dem 1sten, oder so viel mal mehr als von dem ersten u. s. w. In diesem Fall werden sie wie oben berechnet, die gleichen Regeln angewendet und am Ende dann noch mit dem Verhältniß der Preise zu einander, wie es bey den Arbeitern geschehen ist, multiplicirt werden müssen.

Eben so können auch verschiedene Gewichte, oder die Stunden in ihren Entfernungen als ungleich angegeben werden. Aber auch dieses sind nur wieder Zusätze, die ein jeder mit der größten Leichtigkeit zu machen im Stande seyn wird und sich großentheils nach den Lokalitäten richten, und die deßwegen gegenwärtig weiter auszuführen nicht nothwendig seyn wird. Wie viel werden $34,964\frac{9}{10}$ fl. in einem Jahr Zins abtragen, wenn das 100 jährlich zu $4\frac{1}{2}$ angelegt worden ist? Wie viel wird dieses Kapital in $2\frac{3}{4}$ Jahren abtragen?

Die erste Auflösung ist den vorhergehenden und zwar den ersten Anwendungsaufgaben so gleich, daß ich mich nicht mehr bei ihr verweilen will, sondern sogleich zur Lösung der 2ten Aufgabe schreite.

So oft 100 fl. in 34,964$^9/_{10}$ fl. enthalten sind, so oft wird dieses Kapital jährlich einen Zins von 4$^1/_2$ fl. abtragen, und in 2 Jahren muß diese Summe 2 mal genommen werden. Die Regel hievon wäre: man dividirt mit dem Kapital, dessen Zins bekannt ist, in das Kapital, von dem man den Zins sucht, und multiplicirt den Quotienten mit dem Zins, nachdem derselbe mit der Anzahl Jahre, die dieses Kapital angelegt wurde, multiplicirt worden ist. Wie wir bey dem Kopfrechnen gesehen haben, so können auch diese Aufgaben auf die mannigfaltigsten Arten gelöst werden, und folglich sind ihre Regeln eben so mannigfaltig. Als Beleg hievon mag folgende noch eine Stelle finden.

Man multiplicirt das Kapital, dessen Zins unbekannt ist, mit dem Zins, nachdem derselbe mit seiner Zeit multplicirt worden ist, und dividirt endlich das Produkt durch das Kapital, dessen Zins bekannt ist.

Die Gründe dieser Regel sind folgende: trägt das Hundert 4$^1/_2$ in einem Jahr, so werden diese 100 in 2$^3/_4$ Jahren auch eben so viel mal 4$^1/_2$ fl. Zins abtragen und 34,964$^9/_{10}$ fl. werden also 4$^1/_2$ mal 2$^3/_4$ fl. Zins geben, wenn ein Gulden wirklich diese Summe abtragen sollte; nun ist es aber nicht ein, sondern es sind 100 fl., folglich muß noch der 100ste Theil davon genommen werden. Auch kann dem Schüler bey dieser Regel im Vorbeygehen bemerkt wer=

den, daß diese Regel im Leben am häufigsten angewendet und gebraucht werde. Eben so können die gleichen Aufgaben gegeben und gefragt werden, wie viel dieses Kapital in einem oder mehreren Monaten, in einer oder mehreren Wochen, in einem oder mehreren Tagen, Stunden, Minuten, oder Sekunden Zins abtragen werde. Für die Monate wird in der Auflösung 12tel Jahre, für die Wochen 52tel Jahre u. s. w. gesetzt werden. Hiezu können noch ganze gesetzt werden; weil sich durch deren Lösung nichts Neues ergiebt, so füge ich diesem noch bey, daß die oben aufgestellten Auflösungen und Regeln hier volle Anwendung finden. Weil es aber leicht zu hohen Zahlverhältnissen hinaufsteigen könnte, deren Lösung zu viel Zeit erforderte, so muß auf diesen Umstand Rücksicht genommen werden, wenn man nicht Gefahr laufen will, unnütze Zeit zu verlieren.

Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 1 Jahr $3484^1/_2$ fl. Zins abtragen soll? das 100 zu $3^7/_8$ gerechnet.

Wie groß muß dieses Kapital aber seyn, wenn es in $2^1/_3$ Jahr diesen Zins abtragen soll?

Regel und Auflösung der ersten Frage.

Der Zins, dessen Kapital unbekannt ist, wird mit dem Zins, dessen Kapital aber bekannt ist, dividirt, und der Quotient mit dem bekannten Kapital multiplizirt; denn so oft der Zins von 100 in dieser Summe enthalten ist, so oft erfordert es ein Kapital von 100 u. s. w. Will man aber einen solchen Zins in mehreren Jahren erhalten, so muß, bevor mit dem Zins dividirt wird, die Zeit noch mit dem Zins multiplizirt werden. Die weitere Auflösung, so wie auch die Regel, ist dann der obigen ganz ähnlich. Wünscht man aber den Zins in Monaten, Wochen, Tagen, Stunden u. s. w. zu erhalten, so werden diese Eintheilungen des Jahres nur als ein Bruch ins Auge gefaßt und behandelt.

Obige Regel und Auflösung ist dann auch auf diese Fragen anwendbar.

Aufgaben hierüber wären folgende: Wie groß muß ein Kapital seyn, dessen Zins in einem Monat 346 $^{7}/_{8}$ fl. beträgt, wenn 100 jährlich zu $4^{1}/_{2}$ angelegt werden. Man will ein Kapital anlegen, welches in einer Stunde 45 kr. abträgt, angenommen, es werde zu 5 Prozent angelegt, wie groß muß das Kapital seyn, wenn es in 2 Jahren, 3 Monaten und 4 Tagen diesen Zins abtragen soll?

Wie viel tragen 4000 fl. Kapital in 2 Jahren ab, wenn der Zins, wie er auf einander folgt und verfallen ist, wieder zu 5 Prozent verzinset wird?

Diese Aufgabe kann auf sehr verschiedene Arten gelöst werden.

Eine davon wäre, man sucht zuerst auf obige Art den Zins von den 2 Jahren, und der Zins vom Zins, so wie er verfallen ist, wird wieder als Kapital angesehen und zum 1sten Kapital gezählt, und hernach noch einmal auf die gleiche Weise der Zins gesucht. Die Regel hievon fließt aus der Auflösung.

Eine zweyte Art.

Man sieht, was der Zins für ein Theil von dem Kapital in den 2 Jahren sey, und zählt den Zins vom Zins als Theil zum ersten Theil und spricht über einmal aus: Zins und Zins von Zins in diesen 2 Jahren machen $^{41}/_{400}$ vom Kapital, also $^{41}/_{400}$ von diesem Kapital wird auch Zins und Zins vom Zins geben. Eine nicht unzweckmäßige Uebung wird seyn, dieses auf 3, 4 und mehrere Jahre auszudehnen.

Aber auf keinen Fall muß dieses in verwickelte Bruchverhältnisse von Jahren fortgesetzt werden.

Wie lang muß man ein Kapital am Zins liegen lassen, bis der Zins $^{3}/_{7}$ vom Kapital ist, wenn 100 jährlich $4^{1}/_{2}$ abtragen?

Kapital und Zins vereinigt in einer Aufgabe zu geben, wird aber jedoch als Anwendungsaufgabe in keinem Fall wichtig, und darf nur als Uebung der Geisteskräfte des Schülers dann und wann als Abwechselung noch eine Stelle finden.

Wenn 27960 fl. ein Kapital, und den $2^{3}/_{4}$ jährigen Zins desselben zu $4^{1}/_{2}$ Prozent ausmachen, wie groß wird denn das Kapital und wie groß der Zins seyn?

Auflös. Auf 100 fl. Kapital finden sich jährlich immer $4^{1}/_{2}$ fl. Zins, und in $2^{3}/_{4}$ Jahren auch $2^{3}/_{4} \times 4^{1}/_{2}$ gleich $12^{3}/_{8}$, also auf 100 immer $12^{3}/_{8}$ fl, Zins, oder so oft 100 mehr $12^{3}/_{8}$ in 27960 fl. enthalten sind, so oft wird ein solcher Theil für das Kapital 100 und für den Zins $12^{3}/_{8}$ mal genommen werden müssen. Die Regel fliest aus der Auflösung. Wenn $49600^{1}/_{3}$ fl. die Hälfte von einem Kapital und $^{1}/_{5}$ von seinem Zins betragt, das 100 zu 5, so fragt es sich, wie groß das ganze Kapital, und wie groß der ganze jährliche Zins sey? (das 100 zu 5.)

Um diese Aufgabe zu lösen, sucht man durch das Verhältniß des Zinses zum Kapital den ganzen Zins und das ganze Kapital, und verfährt dann wie oben. So können verschiedene Kapitalien angelegt gegeben werden, und der Zins, den sie in einer gewissen Zeit abtragen, gesucht werden; ferner zu wie viel das 100 bey jedem Kapital angelegt worden sey. Welches am meisten und welches am wenigsten abtrage? Auch kann der Zins noch mit den Kapitalien verbunden und neue Aufgaben gebildet werden. Dieses ist aber nichts weiter als eine reine Combination der oben aufgestellten Reihenfolgen. Wer aber dieselbe im unverbundenen Zustand aufzufassen und zu lösen im Stande seyn wird, kann durch solche Verbindungen auf keine neuen Schwierigkeiten mehr stoßen. Um auch dem weniger geübten Lehrer noch ein paar leitende Gesichtspunkte in Beyspielen zu geben, mögen folgende Aufgaben noch hier stehen.

Es hat jemand ein Haus für 20484 fl. gekauft, er giebt es jährlich in die Miethe für 1040 fl., mit der Bedingung, daß es unterhalten werden müsse; es fragt sich, ob er mehr vom 100 ziehen würde, wenn er es zu 5¾ als Kapital angelegt haben würde? — An Aufgaben dieser Art knüpfen sich die verschiedensten Fragen.

Wie z. E. am Ende von 2 Jahren wird ihm ein Miethzins von 2160 fl. gezahlt; es fragt sich, ob er mehr erhalten würde, wenn das 100 zu 5 angelegt und der Zins wieder verzinset worden wäre?

Es hat jemand einen Hof für 24640½ fl. gekauft, der Ertrag desselben ist jährlich 3590¼ fl., die

Anbauungskosten und sonstigen Auslagen belaufen sich jährlich auf 1200 fl.; es fragt sich, wie viel das 100 auf diesen Hof jährlich abtrage? wie viel müßte er abtragen, wenn das 100 jährlich 6 fl. geben sollte?

Wie theuer müßte er, um diesen Zins zu erhalten, gekauft worden seyn. Die weitere Ausführung ist beym Kopfrechnen nahe zu sehen. Ich schreite zu den folgenden Aufgaben vor. Es haben zwey Personen eine Handlung oder irgend eine gemeinschaftliche Unternehmung angefangen: die erste legt 4680½ fl. und die 2te 10496 fl., beyde auf gleiche Zeit in dieselbe, und haben 4644¾ fl. gewonnen; es fragt sich, wie viel einer jeden davon gehöre?

Auch über diese und alle andern folgenden Aufgaben sind sehr mannigfaltige Auflösungen gemacht worden, und folglich können diesfalls eben so mannigfaltige Regeln aufgestellt werden. Eine davon wäre:

Man addirt die Einlage von beyden und mit dieser Summe wird in den Gewinn dividirt, und dieser Quotient mit der Einlage des 1sten multiplizirt, giebt den Gewinn des 1sten; den nämlichen Quotienten aber mit der Einlage des 2ten multiplizirt gibt endlich das, was der 2te gewinnt.

Eine 2te Regel wäre:

Die Einlage von beyden verhält sich zum Gewinn von beyden, wie die Einlage des 1sten zum Gewinn des ersten; und nach der Dreysatzregel wissen wir, daß man das 3te Glied mit dem zweyten multipliziren und mit dem ersten dividiren muß, um das 4te Glied, oder den Gewinn des 1sten zu erhalten. Will man aber den Gewinn des 2ten wissen, so wird als drittes Glied die Einlage des 2ten statt derjenigen des 1sten gesezt, und ganz auf die nämliche Weise verfahren. Die Gründe sind in dem, was beym Kopfrechnen aufgestellt worden, so vielseitig dargelegt, daß ich nur dahin verweisen darf. Haben aber statt zwey Personen drey eine Unternehmung angefangen, so wird ganz auf die gleiche Weise zu Werke gegangen. Es müssen dann folglich statt zwey, drey Summen zusammen gezählt werden, und eben so giebt es dann drey geometrische Verhältnisse. Bey 2, 3, 4 u. s. w. Personen kann der Gewinn der letzten aber immer gefunden werden, wenn man den Gewinn der letzten vorhergehenden Personen von der Totalsumme abzieht.

Ist aber bey 2, 3, 4 u. s. w. Personen, die irgend eine Unternehmung gemeinschaftlich führen, ungleich lange Zeit angegeben worden, so müßte die Einlage eines jeden mit seiner Zeit noch multiplizirt und hernach ganz gleich wie oben verfahren werden; denn in 2, 3 Jahren würde das Geld, welches er in die Unternehmung thun würde, auch 2, 3 mal den Zins abtragen, den dasselbe in einem Jahr abzutragen vermag. Desgleichen, wenn es ein Bruchverhältniß von Jahren giebt, als $^1/_2$, $^2/_3$, $1^1/_2$; Monate werden als 12tel Jahr u. s. w. in's Auge gefaßt werden müssen. Statt in Handlungsunternehmungen kann man auch Geld an Zins legen, und den Zins mit einem Gewinn, den man in der einen oder andern Unternehmung erhalten würde, vergleichen. Diese Aufgaben, mit den vorhergehenden verbunden, bilden wieder neue sehr man=

nigfaltige Fragen. Die weitere Ausführung wird aber, so weit man es allenfalls nothwendig erachten mag, von jedermann verwirklicht werden können.

Wichtiger für das bürgerliche Leben aber als Uebung und Stärkung der geistigen Kräfte finden folgende Aufgaben hier noch eine Stelle.

Es haben 3 Personen eine Unternehmung angefangen; die erste legt 3460½ fl. auf unbekannte Zeit in diese Unternehmung und gewinnt 340 fl.; die zweyte 9000 fl. und gewinnt 604½ fl., und die dritte 4480 fl. und gewinnt 700 fl.; es fragt sich, in welchem Verhältniß die Zeit stehe, in denen sie ihre Gelder in dieser Unternehmung hatten. Regel davon:

Die Einlage des zweiten wird mit derjenigen des ersten dividirt, unb hernach der Gewinn des ersten mit diesem Quotienten multiplizirt und mit diesem Produkt in den Gewinn des zweiten dividirt; dieser Quotient zeigt das Verhältniß der Zeit der zweiten Person zur ersten an, nachdem die der ersten als Einheit angenommen ist.

Eben so wird die Anlage des dritten durch die des ersten dividirt ꝛc.; denn so oft die Einlage des zweyten so groß ist, als die des ersten, so oft müßte er, wenn er es gleich lang in der Unternehmung lassen würde, auch so viel gewonnen haben; folglich würde durch die Multiplikation des Quotienten mit dem ersten Gewinn der zweyte entstehen; und so oft der zweyte Gewinn wirklich so groß ist, als dieses Produkt, so oft hat sie seine Einlage auch so lang in der Unternehmung gelassen, als der erste.

Die Zeit der ersten Person muß diesem zufolge als

Einheit betrachtet werden, und der lezte Quotient zeigt das Verhältniß zu dieser Einheit an.

Würden diese Theile in Jahren ausgedrückt seyn, so könnten mit der nämlichen Leichtigkeit und auf gleiche Weise statt allgemeine Theile dann Jahre gefunden werden.

Es fangen 4 Personen eine Unternehmung an, ihre Einlagen sind unbekannt; die erste soll es auf $1\frac{1}{2}$, die zweite auf $3\frac{1}{4}$, die dritte auf 2, und die vierte endlich auf 3 Jahre in dieselbe legen; die erste soll in dieser Zeit $3644\frac{1}{}$, die zweite 3000 fl., die dritte 400 fl. und die vierte endlich $560\frac{1}{2}$ fl. gewinnen; es fragt sich, in welchem Verhältniß ihre Einlagen zu einander stehen? Würde die Total-Einlage gegeben werden, so könnte man es in Gulden, statt nur in einem Verhältniß, anzeigen.

Die Regel und die Gründe sind der vorhergehenden so ähnlich, daß ich nicht weiter einzutreten und diese Aufgabe zu lösen für nöthig erachte.

Weil dieses sehr verwickelte Aufgaben sind, so wird man wohl thun, den Schüler dann und wann die Probe machen zu lassen.

Einige der wesentlichsten Anwendungsaufgaben über die Mischungen werden hier vollkommen an ihrem Platz seyn.

Wünscht man diese aber noch ausführlicher zu kennen, so darf ich diesfalls nur auf das angewandte Kopfrechnen hinweisen.

Man hat zweyerley Wein, Wein, wovon die Maas 10 Groschen, und Wein, wovon die Maas $3\frac{2}{5}$ Groschen kostet, mit diesen 2 Weinen will man eine Mischung von 20000 Maas machen, wovon dieselbe auf $4\frac{2}{3}$ Groschen zu stehen kommt; es fragt sich, wie viel von jeder Art dazu genommen werden müsse?

Die Regel davon ist:

Der Unterschied vom schlechten Wein zur Mischung und der Unterschied vom guten zur Mischung wird zusammen gezählt und mit dieser Summe die ganze Mischung dividirt; für den guten Wein wird dann der Quotient mit dem Unterschied zwischen dem schlechten und der Mischung multiplizirt, und für den schlechten mit dem Unterschied zwischen dem guten und der Mischung; denn an dem einen Wein wird gewonnen, am andern aber verloren, und dieser Gewinn muß auf diese Weise immer zuerst durch den Verlust aufgehoben werden.

Die weitern Gründe und Auflösung sind in dem, was bey den Kopfrechungsaufgaben aufgestellt worden ist, nachzusehen; und dürfte, in so fern dieses dem Schüler nicht ganz klar seyn sollte, auf die nämliche Weise noch einmal aufgelöst werden, wie es daselbst in mehreren Beyspielen in ein heiters Licht gesetzt worden ist.

Wäre aber an obiger Mischung angegeben worden, es sollen $100\frac{1}{2}$ fl. gewonnen werden, so fragt es sich, wie viel von jeder der Arten Wein genommen werden müsse?

Um diesen Gewinn zu erhalten, wird als allgemeine Regel folgende Verfahrungsart dienen.

Man dividirt mit dem Unterschied des schlechten zur Mischung den zu suchenden Gewinn; der Quotient giebt die Anzahl Maas, die vom schlechten zum voraus in die Mischung genommen werden müssen, um den begehrten Gewinn zu erhalten.

Die weitere Auflösung ist der vorhergehenden ganz gleich.

Würde ein Verlust statt eines Gewinns gefordert werden, so wäre die Regel der letzten hinwieder, nachdem man den Unterschied vom guten zur Mischung in den Gewinn dividirt haben würde, ganz gleich.

So können auch 3 Arten gemischt und wieder der Verlust oder der Gewinn gesucht werden.

Desgleichen mit Metallen, worüber man die bey'm Kopfrechnen aufgestellten Beyspiele auch für diesen Endzweck benutzen und gebrauchen kann. Unmittelbar an diese Uebungen schließen sich noch einige andere etwas verwickelte Kunstregeln, wie der Kettensatz und andere mehr an. Ich bleibe aber in gegenwärtigem Band auf dieser Stuffe stehen, und eile nicht mit einseitigen Anwendungs-Uebungen und Aufgaben vor, während ich in den reinen Zahlverhältnissen, auch auf dem nämlichen Punkt die Uebungen abgebrochen habe. Zwey, drey und mehrere unbekannte Zahlen können auf die gleiche Weise, wie in gegenwärtiger Schrift eine Unbekannte ausführlich niedergelegt worden ist, behandelt werden.

Nicht weniger können mit Hülfe des Quadrats und des Kubus auch die unbekannten Zahlen des zweyten und dritten Grads auf eine eben so anschauliche als leichte Weise nach diesen Grundsätzen ausgeführt werden.

Aber alle diese Uebungen gehören auf eine höhere vorgerücktere Stufe, und wenn ich mir keinen einseitigen Vorschritt in dieser Schrift erlauben will; so muß ich in jeder Richtung da, wo diese Harmonie gestört werden könnte, einhalten.

Eben so finden sich in dem, was man gewöhnlich unter den Begriff Arithmetik bringt, noch mehrere sehr wichtige Kunst-Erleichterungsmittel, die ich gleichfalls auf eine höhere Stuffe nach den aufgestellten Grundsätzen setze; den Schüler nur mit mechanischen Fertigkeiten und Kunstgriffen bekannt und vertraut zu machen, würde das, was so sorgfältig und sicher auf diesem Weg erreicht und erzielt worden ist, in Gefahr bringen, es wenigstens zu schwächen.

Keiner künstlichen Erleichterung in der Arithmetik darf der nach diesen Grundsätzen gut geführte Schüler fremd bleiben. Er soll nicht nur mit aller diesfalls gefundenen Erleichterung und Verschnellerung im Aufsuchen der Resultate vertraut und bekannt werden; sondern ein nach diesen Grundsätzen gut geführter Schüler wird sich im Stande fühlen, alle diesfälligen Kunst-Erleichterungs-Mittel größtentheils selbst zu finden. Aber auch alles dieses wird in der Fortsetzung der Darlegung des Gegenstandes außer allen Zweifel gesetzt werden.

Ich füge diesem nur noch bey:

Die verschiedenen Gesichtpunkte, unter denen die wichtigeren Anwendungsaufgaben gebildet worden sind, können auch noch mit einander verbunden und dadurch die mannigfaltigsten Aufgaben gebildet werden; die aber leicht von jedem Lehrer, so weit er es immer für nothwendig erachten mag, ausgeführt werden können, besonders, wenn man den Typus, der bey der Zahl als Entwicklung der Geisteskräfte des Kindes aufgestellt worden ist, zu Rathe ziehen will.

Sehr viele Aufgaben werden aber in keinem Fall hierüber nothwendig, besonders wenn die Einfachen und Unverbundenen gehörig eingeübt worden sind. Bey'm angewandten Zifferrechnen soll nie mehr als eine Aufgabe von der nämlichen Art dem Schüler zur Lösung vorgelegt werden. Im Fall es nothwendig würde, daß ein und dieselbe Aufgabe mehreremal von demselben gelöst werden müßte, um ihm irgend eins der aufgestellten Verhältnisse anschaulich zu machen, so könnte angenommen und gefolgert werden, der Schüler sey noch nicht gehörig hiefür vorbereitet worden. Ich habe die meisten Aufgaben mit Zahlen versehen, damit der Lehrer nicht versucht werde, seine Zuflucht zu umfassenden Zahlverhältnissen zu nehmen. – Würde man sehr hohe Zahl-Verhältnisse in die Aufgaben bringen, so würden sich vorzüglich die mechanischen Fertigkeiten entwickeln, die immer untergeordnet bleiben müssen, und nebenbey gienge noch sehr viel Zeit verloren.

Gewöhnlich giebt man den mechanischen Fertigkeiten bey'm Zifferrechnen einen Werth, den sie nicht verdienen.

Als nicht unwichtig darf ferner die Angewöhnung angesehen werden, sich im Zifferrechnen daran zu gewöhnen, jedesmal ein richtiges Resultat ohne viele Versuche zu finden; denn was sich der Schüler im Anfang einmal angewöhnt haben wird, geht nicht mehr leicht verloren und der Zeitgewinn ist in mehreren Beziehungen sehr groß; und wird später für die praktischen Verhältnisse desselben von großem Nutzen seyn.

Regeln und Gesetze, die der Schüler in den aufgestellten Reihenfolgen auffinden wird, dürfen aber nie durchs Auswendiglernen oder durch die Gedächtnißkraft zum Eigenthum des Schülers gemacht werden.